ТОЧНАЯ НАУКА

естественнонаучный журнал

Публикации для студентов, молодых ученых и научно-преподавательского состава на www.t-nauka.ru

ISSN 2500-1132 Издательский дом "Плутон" www.idpluton.ru

Выпуск № 36

КЕМЕРОВО 2019

14 января 2019 г.
ББК Ч 214(2Рос-4Ке)73я431
ISSN 2500-1132
УДК 378.001
Кемерово
Журнал выпускается ежемесячно, публикует статьи по естественным наукам. Подробнее на www.t-nauka.ru
За точность приведенных сведений и содержание данных, не подлежащих открытой публикации, несут ответственность авторы.
Редкол.:
Никитин Павел Игоревич - главный редактор, ответственный за выпуск журнала
Баянов Игорь Вадимович - математик, специалист по построению информационно-аналитических систем, ответственный за первичную модерацию, редактирование и рецензирование статей
Артемасов Валерий Валерьевич - кандидат технических наук, ответственный за финальную модерацию и рецензирование статей
Зимина Мария Игоревна - кандидат технических наук, ответственный за финальную модерацию и рецензирование статей
Нормирзаев Абдукаюм Рахимбердиеви - кандидат технических наук, Наманганский инжинерно-строительный институт (НамМПИ)
Безуглов Александр Михайлович - доктор технических наук, профессор кафедры математики и математического моделирования, Южно-российский государственный политехнический университет (Новочеркасский политехнический институт) им. М.И .Платова,
Наджарян Микаел Товмасович - кандидат технических наук, доцент, Национальный политехнический университет Армении
Шушлебин Игорь Михайлович - кандидат физико-математических наук, кафедра физики твёрдого тела Воронежского государственного технического университета
Равшанов Дилшод Чоршанбиевич - кандидат технических наук, заведующий кафедрой «Технология, машины и оборудования полиграфического производства», Таджикский технический университет имени академика М.С.Осими
Крутякова Маргарита Викторовна – доцент, кандидат технических наук, Московский политехнический университет
Гладков Роман Викторович - кандидат технических наук, доцент кафедры эксплуатации вооружения и военной техники Рязанского гвардейского высшего воздушно-десантного командного училища
Моногаров Сергей Иванович - кандидат технических наук доцент Армавирского механико-технологического института (филиал) ФГОУ ВО КубГТУ
Шевченко Сергей Николаевич - кандидат технических наук, доцент кафедры СЭУ, Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота РФ
Отакулов Салим - Доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Джизакского политехнического института
А.О. Сергеева (ответственный администратор)[и др.];

Естественнонаучный журнал «Точная наука», входящий в состав «Издательского дома «Плутон», был создан с целью популяризации естественных наук. Мы рады приветствовать студентов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников. Надеемся подарить Вам множество полезной информации, вдохновить на новые научные исследования.
Издательский дом «Плутон» www.idpluton.ru e-mail: admin@idpluton.ru
Подписано в печать 14.01.2019 г. Формат 14,8×21 1/4. | Усл. печ. л. 2.2. | Тираж 500.
Все статьи проходят рецензирование (экспертную оценку).
Точка зрения редакции не всегда совпадает с точкой зрения авторов публикуемых статей.
Авторы статей несут полную ответственность за содержание статей и за сам факт их публикации.
Редакция не несет ответственности перед авторами и/или третьими лицами и организациями за возможный ущерб, вызванный публикацией статьи.
При использовании и заимствовании материалов ссылка обязательна.

Содержание

1. MATHEMATICAL MODELS TASK ABOUT TORSIONAL OSCILLATIONS OF THE CYLINDRICAL LAYER FILLED WITH VISCOUS FLUID ……..……...….….2
Ахмеджанова Ф., Хамидов И., Боротова М.
2. РЕШЕНИЕ ПАРАДОКСА ЭРЕНФЕСТА……...……..8
Путенихин П.В.
3. ПРАВИЛА СЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ БЕСКОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА ……...…….....23
Путенихин П.В.
4. КОРРЕКТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОТЕЛЕ ГИЛЬБЕРТА……...…….....40
Путенихин П.В.
5. ПРОТИВОРЕЧИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ БЕЛЫХ ДЫР……46
Путенихин П.В

Ахмеджанова Фарида
кандидат технических наук, доцент
Хамидов Исфандиёр
студент
Боротова Муборак
студент
ФАКУЛЬТЕТ СЕРВИСА И ТУРИЗМА, САМАРКАНДСКИЙ ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА, САМАРКАНД, РЕСПУБЛИКА УЗБЕКИСТАН

Akhmeddjanova Farida
Candidate of technical sciences, assistant professor
Hamidov Isfandiyor
student
Borotova Muborak
student

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧИ О КРУГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРАТИЧЕСКОГО СЛОЯ, ЗАПОЛНЕННОГО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

MATHEMATICAL MODELS TASK ABOUT TORSIONAL OSCILLATIONS OF THE CYLINDRICAL LAYER FILLED WITH VISCOUS FLUID

Аннотация: В этой научной работе отражены крутильные колебание цилиндрического слоя заполненного вязкой несжимаемой жидкостью и при помощи интегральных модели создаются математические модели, используемые в решениях определённых задачи. На основание программы Марле-7 были решены и отображены графические изображение.

Annotation: In this scientific work be learned torsional oscillatios, flow in definite pressure of the cylindratical layer filled with viscous fluid and substitution of integral models support structured task's mathematical models, precise tasks be solved. From Maple-7 operation be used revolved tasks, be drawed graphic of tasks, bring their analysis.

Ключевые слова: слой, цилиндр, эластик, жидкость, симметричный, давление, математические модели, интегральные замены, плотность.

Key words: crust, cylindric, elastic, fluid, symmetrical, pressue, mathematical tasks, substitution of integrals, compactness

Introduction. In a cylindrical system of coordinates (r,θ,z) the homogeneous and isotropic circular cylindrical elastic layer r_1 with internal and external radii r_2 is considered. In this case, $r_1 = const, r_2 = const, r_2 > r$ and the thickness of the layer takes $h = r_2 - r_1$ arbitrary values r_1 and r_2 depending on and. In addition, it is assumed that the cylindrical layer, as a three-dimensional body, strictly obeys the mathematical theory of elasticity and is described by its three-dimensional equations. In addition, it is assumed that the cylindrical layer, as a three-dimensional body, strictly obeys the mathematical theory of elasticity and is described by its three-dimensional equations. It is believed that the inner cavity of the layer is filled with viscous uncompressible resting liquid, described by the linearized equations of Nave - Stokes [1]. In the future we will consider the torsional fluctuations of the layer and assume that it is loaded only along the axis $0z$

Equation of motion of a layer;

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{U}_i, \qquad (i, j = r, \theta, z) \qquad x_i \in V \qquad (1)$$

Used in the form of Wave equations;

$$(\lambda + \mu)\Delta\hat{O} = \rho \frac{\partial^2 \hat{O}}{\partial t^2},$$

$$x_i \in V_1 \qquad (2)$$

$$\mu\Delta\vec{\varphi} = \rho\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial t^2}.$$

For the potentials of longitudinal f and transverse waves $\vec{\varphi}$, entered by the formula;

$$\vec{U} = grad\ \phi\ +\ rot\ (\vec{e_3}\varphi_1)\ +\ rot(\vec{e_3}\varphi_2), \qquad x_i \in V_1 \qquad (a)$$

Where is the Laplace operator in the coordinate system (r,θ,z);

σ_{ij}, U_i - Components of stress tensor and displacement vector;

$\lambda,\ \mu$ - Lamé coefficients; ρ - Density V_1 - the volume occupied by the layer.

For viscous uncompressible liquid, at its small fluctuations we have the following ratios:
Non-compressibility condition (3);

$$div\ \vec{v} = 0, \qquad x_i \in V_2 \qquad (3)$$

Navier - Stokes equation;

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} - \nu'\Delta\vec{V}\ +\ \frac{1}{\rho_0}\ grad\ p = 0, \qquad x_i \in V_2 \qquad (4)$$

Navier-Stokes Law (5);

$$P_{ij} = -P\sigma_{ij}\ +\ \mu'\ e_{ij},\ x_i \in V_2 \qquad (5)$$

Where $\vec{V}$ - The velocity vector of liquid particles; μ - Viscosity coefficient;

$\nu' = \dfrac{\mu'}{\rho'}$ - Kinematic coefficient of viscosity;

ρ_0' - Density of the resting liquid;

P - Hydrodynamic pressure;

P_{ij} - Components of stress tensor in the liquid;

e_{ij} - Cmponents of strain velocity Tenzora;

V_2 - Volume of space occupied by the liquid (inner cavity of the layer).

The introduction of scalar G and vector functions $\vec{x} = \vec{x}(x_1, x_2)$ according to the formula ,

$$\vec{V} = \frac{\partial}{\partial t}\{grad\ \ G + zot[\vec{e_3}x_1\ +\ rot(\overrightarrow{e_3x_2})]\} \qquad (6)$$

Equations (3), (4) are given and the view

$$\Delta G = 0,\ (\frac{\partial}{\partial t} - \nu'\Delta)\ x_1 = 0,\ (\frac{\partial}{\partial t} - \nu'\Delta)\ x_2 = 0 \qquad (7)$$

For liquid we put

$$V_r = V_z = 0,\ V_\Theta = V_\Theta(r,z,t), \quad p = 0, \qquad x_i \in V_2 \qquad (8)$$

Then the condition of continuity, taking into account the conditions of incompressibility, should be

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} = 0, \qquad x_i \in V_2 \qquad (9)$$

According to (6) P and ρ' and through G, x_1 and x_2 conditions (7) and (8) are fulfilled, if in (6)

$$G = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = x_1(r,z,t) \qquad (10)$$

In case (10) of (6) we get to V_Θ represent

$$V_\Theta = -\frac{\partial^2 x_1}{\partial r \partial t}\ , \qquad x_i \in V_2 \qquad (11)$$

Where the function X_1 is the solutions of the equation

$$[\frac{\partial}{\partial t} - V'\ (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})]\ x_1 = 0, \qquad x_i \in V_2 \qquad (12)$$

For the layer, accept the following

$$U_r = U_z = 0, \qquad U_0 = U_0(r,z,t), \qquad x_i \in V_1 (13)$$

Conditions (13) will be performed if put

$$U_\Theta = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}, \quad x_i \in V_1 \qquad (14)$$

Where the function φ_1 based on (2) satisfies the equation

$$(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\ \ \varphi_1 = \frac{1}{b^2}\varphi_1, \qquad x_i \in V_1 (15)$$

Conditions on the surface of the layer at $r = r_2$ and at the boundary of $r = r_1$ of the environment section are

$$\begin{aligned} &\sigma_{r\Theta}(r_2,z,t) = f_{r\Theta}(z,t), \\ &\sigma_{r\Theta}(r_1,z,t) = p_{r\Theta}(r_1,z,t), \\ &\sigma_{r\Theta}(r_1,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}U_\Theta\ \ (r_1,z,t) \end{aligned} \qquad (16)$$

Initial conditions are zero.

Fundamental part. Thus, the problem of torsional oscillations of a cylindrical layer with viscous uncompressible liquid is given to the solution of equations (12), (15) with boundary (16) and zero conditions [3, 4].

To solve equations (12) and (15) $x_1\ u\ \varphi_1$ imagine functions as

$$[x_1, \varphi_1] = \int_0^\infty \begin{matrix}\sin kz \\ -\cos kz\end{matrix}\}\ dk \int_{(l)} [x_{10}, \varphi_{10}]\ e^{pt} dp, \qquad (17)$$

The substitution of which in (12) and (15) gives

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial r} - \alpha^2 \varphi_{10} = 0, \qquad && \alpha^2 = k^2 + \frac{1}{b^2}\ p^2, \\ &\frac{\partial^2 x_{10}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial x_{10}}{\partial r} - \beta^2 x_{10} = 0, \qquad && \beta^2 = k^2 + \frac{1}{\nu'}\rho. \end{aligned} \qquad (18)$$

General solutions of equations (18), limited in appearance $r \to \infty\ u\ \ r = 0$

$$\begin{aligned} &\varphi_{10}(r) = A_1 I_0(\alpha r)\ +\ A_2 K_0(\alpha r), \\ &x_{10} = B I_0(\beta r) \end{aligned} \qquad (19)$$

The function of external influences is also presented as

$$f_{ro}(z,t) = \int_0^\infty \begin{matrix}\sin kz \\ -\cos kz\end{matrix}\}\ dk \int_{(l)} [x_{10}, \varphi_{10}] e^{pt} dp. \qquad (20)$$

Expressing the tension through $\sigma_{r\Theta}\ u\ \ p_{r\Theta}$ the entered potentials $\varphi_1\ u\ \ x_1$, and also presenting them as (20), from the boundary conditions (16),

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\varphi_{10}=\frac{1}{\mu}f_{ro}^{(0)}, \qquad при\ r=r_2,$$

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\varphi_{10}=2\frac{\mu'}{\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{2}\beta^2\right]px_{10}, \qquad при\ r=r_1$$

We get to take the desired values of displacement in the points of some intermediate surface of the cylindrical layer, the radius of which is determined by the formula

$$\xi=\left(V-\frac{r_1}{r_2}\right) \qquad (21)$$

Having expressed the transformed movement substituting in it general decisions U and U_0 *from* φ_{10} *и* x_{10}, movement substituting in it general decisions (19) and using standard expansions of modified functions of Bessel in power series, believing in the resolution $r=\xi$ and proceeding from its general kind we introduce new functions depending on parameters to κ and p, by formulas

$$U_{0,0}^{(0)}=-\frac{1}{2}\alpha^2\left\{A_1-A_2\left[\ln\frac{\alpha\xi}{2}-\varphi(1)-\frac{1}{2}\right]\right\}, \quad U_{0,0}^{(0)}=\frac{1}{\xi}A_2, \qquad (22)$$

By substituting Solutions (19) in the boundary conditions we will get

$$\alpha^2\left[A_1I_1(\alpha r_1)+A_2K_2(\alpha r_2)\right]=-\mu^{-2}f_{ro}^{(0)},$$

$$\frac{2}{r_1}\left[A_1I_1(\alpha r_1)+A_2K_2(\alpha r_2)\right]=-\alpha\left[A_1I_0(\alpha r_1)+A_2K_0(\alpha r_2)\right]=-\frac{\mu'}{4\mu}\beta^2pr_1\alpha^2\left[A_1I_1(\alpha r_1)+A_2K_2(\alpha r_2)\right], \qquad (23)$$

Using standard expansions of Bessel functions into power series r_1 *and* r_2, by degrees as well as substituting the expressions of constant A_1 and A_2 by formulas (22) and by entering functions by formulas $U_{\Theta,0}$ *и* $U_{\Theta,1}$ and λ^n from conditions

$$\left[U_{0,0},U_{0,1}\right]=\int_0^\infty\left.\begin{matrix}\sin kz\\-\cos kz\end{matrix}\right\}dk\int_{(l)}\left[U_{0,0}^{(0)},U_{0,1}^{(0)}\right]e^{pt}dp.$$

$$\lambda^n(\zeta)=\int_0^\infty\left.\begin{matrix}\sin kz\\-\cos kz\end{matrix}\right\}dk\int_{(l)}\left[\lambda^{2n}(\zeta)\right]e^{pt}dp.$$

We get equations (22)

$$C_{11}U_{0,0}+C_{12}U_{0,1}=\mu^{-1}f_{ro},$$
$$(C_{12}-RC_{31})U_{0,0}+(C_{22}-RC_{32})U_{0,1}=0, \qquad (26)$$

Where the operators of $C_{i,j}$ have the form

$$C_{1i}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(r_i/2)^{2n+2}}{n!(n+2)!}\quad\lambda_2^n.$$

Here R is a reaction of viscous uncompressible liquid to the vibrations of the shell

$$R=\frac{r_1}{4}\frac{\mu'}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \qquad (27)$$

Based on the expression

$$\alpha^2=k^2+\frac{1}{b^2}p^2$$

It is easy to conclude that the operators λ^n in the variables (z, t) are equal

$$\lambda^n=\left[\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^n, \qquad n=1,2,3,... \qquad (28)$$

Conclusion. In accordance with (28) equations (27) are the differential equations of infinitely high order relative to the main parts of the circular movement of the points of the intermediate surface of the cylindrical elastic layer with viscous uncompressible liquid.

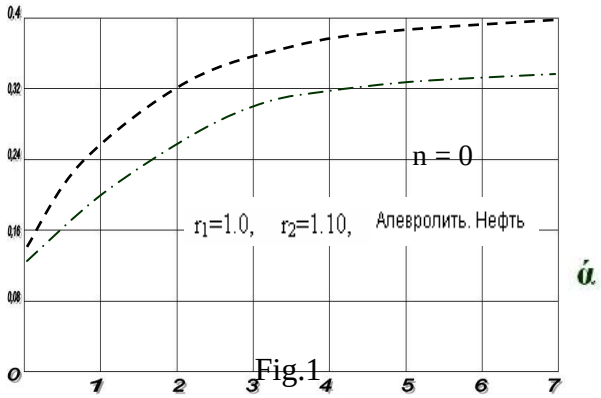


Fig.1

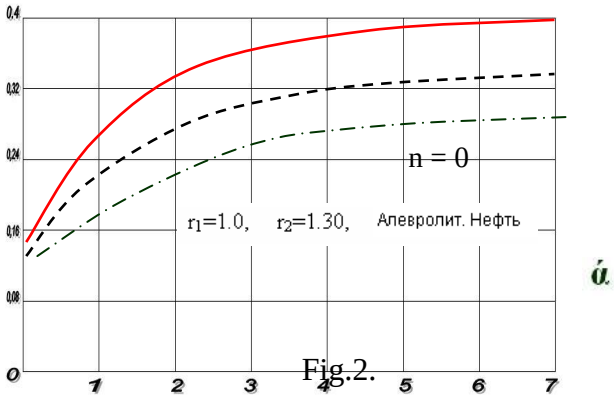
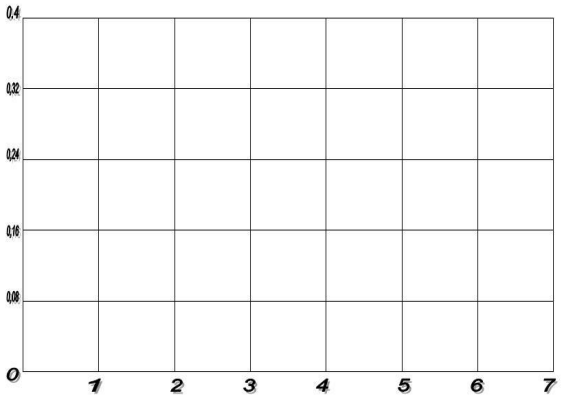
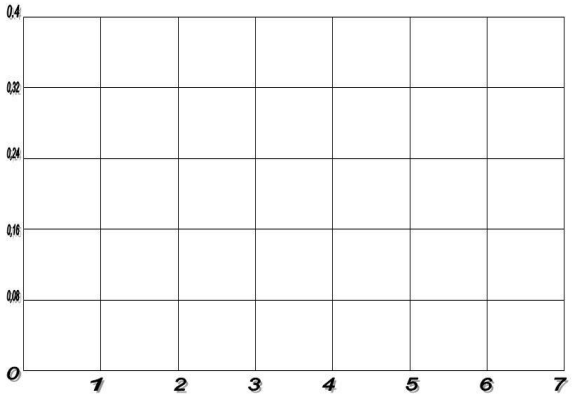


Fig.2.

Fig. 1.graph of dependence of oscillatory frequencies from wave numbers at alabaster of a cylindrical layer in absence of a liquid where h = 0, 1.

Fig. 2 graph of the dependence of oscillatory frequencies on the wave numbers at the alabaster of the cylindrical layer in the absence of liquid where h= 0.3.





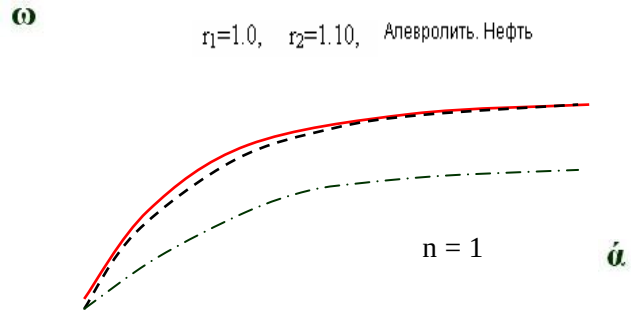


Fig.3.

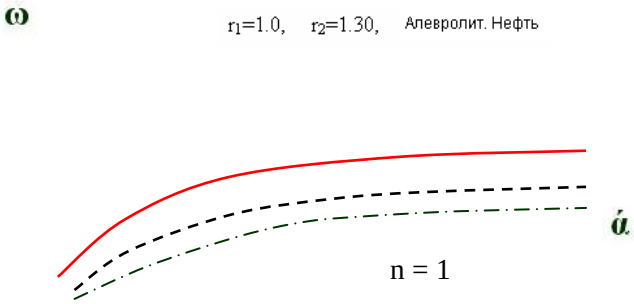


Fig.4.

Fig. 3. Graph of dependence of oscillatory frequencies from wave numbers at alabaster of a cylindrical layer in filling with neftoproducts where h = 0, 1.

Fig. 4 graph of dependence of oscillatory frequencies from cylindrical sloywave numbers at an allerolite in filling with neftoproducts where h = 0, 3.

It is easy to express the movement U_{Θ} and tension of $\sigma_{r\Theta}, \sigma_{z,\Theta}$ internal sections of the layer and pressure, $P_{r\Theta}$ *через* $U_{\Theta,0}, U_{\Theta,1}$, which by the results of solving equations (27) Allow to determine the stress-strain state of the arbitrary section of the layer and stress on the liquid surface. Note that infinitely high order of equations makes them unsuitable for solving applied problems.

Therefore, considering the fulfilled conditions obtained in earlier works imposed on the frequency of oscillations and the wave number of propagating waves limited to zero (n = 0), the first (n = 1) and other approximations can get the equations of oscillation suitable To solve engineering problems.

It should be noted that the restrictions are imposed on both the purity and the wave number, which means that the truncated equations do not describe the high-frequency and shortwave processes, and that they are suitable only for low-frequency external influences. In addition, the resulting approximate equations at any approximation are not applicable in the case of concentrated impacts on the system.

However, it does not follow that these equations are applicable to a very narrow class of tasks or do not apply at all, because the functions f_r presented in the form (20), represent a sufficiently broad class and therefore truncated equations have a sufficiently wide Scope of applicability [4].

Note that infinitely high order of equations makes them unsuitable for solving applied problems. Therefore, considering fulfilled conditions, received in earlier works [4], imposed on frequency of fluctuations wave number of propagating waves and limiting zero (n = 0), first (n = 1), and other approximations it is possible to get equations of oscillation Suitable for solving engineering problems.

Literatures:

1. Guz A. N. about the problems of aerohydroelasticity for the bodies with initial voltages//PRIKL.Mechanics. 1980. 16. -№ 3. -P. 3-21;

2. Guz A. N. Propagation of waves in a cylindrical shell with viscous compressible liquid//Prikl. Mechanics. 1980. 16. -№ 10. -P. 10-20;

3. Kochin N. E, Kibel i. A, Rosa. N. V. Theoretical hydromechanics. -M.: Gifml, 1963. 728;

4. Khudoinazarov kh. K. Theories of longitudinal-radial oscillations of circular cylindrical viscous-elastic shell with its compressible eerie//dynamics and durability of heavy machines. -Dnepropetrovsk: Published in the Dgu, 1989. -P. 53-62.

Путенихин Петр Васильевич
Putenikhin Peter Vasilievich
Независимый исследователь

УДК 530.12; 531.15; 531.133.1

РЕШЕНИЕ ПАРАДОКСА ЭРЕНФЕСТА

DECISION OF THE EHRENFEST'S PARADOX

Аннотация: Рассмотрена задача о вращающемся колесе, сформулированная в виде парадокса Эренфестом свыше ста лет назад. Показано, что на самом деле парадокса нет. Специальная теория относительности в отношении вращающегося колеса делает непротиворечивые предсказания.

Abstract: The rotating wheel problem, formulated as a paradox by Ehrenfest over a hundred years ago, is considered. It is shown that in fact there is no paradox. The special theory of relativity with respect to the rotating wheel makes non-contradiction predictions.

Ключевые слова: парадокс колеса; парадокс цилиндра; парадокс поезда Эйнштейна; абсолютно твердое тело; поперечный эффект Лоренца; изгибающий эффект Лоренца

Keywords: wheel paradox; cylinder paradox; the Einstein train's paradox; absolutely solid body; transverse Lorentz effect; Lorentz bending effect

Описание парадокса

Парадоксы СТО чаще всего приводятся в виде мысленных экспериментов, то есть, воображаемого эксперимента на основе положений теории. Одним из таких парадоксов по праву считается один из старейших парадоксов – парадокс Эренфеста, в настоящее время часто формулирующийся как "парадокс колеса" и который по утверждениям многих авторов до настоящего времени не имеет удовлетворительного объяснения, решения.

Изначально парадокс сформулирован в краткой заметке Эренфеста, основное содержание которого представлено в следующем фрагменте этой заметки:

"... пусть имеется не абсолютно твердый цилиндр C с радиусом R и высотой H. Пусть он постепенно приводится во вращение вокруг своей оси, происходящее затем с постоянной скоростью. Назовем R' радиус, который характеризует этот цилиндр с точки зрения неподвижного наблюдателя. Тогда величина R' должна удовлетворять двум противоречащим друг другу требованиям:

а) длина окружности вращающегося цилиндра по сравнению с состоянием покоя должна сократиться: $2\pi R'<2\pi R$, поскольку каждый элемент такой окружности движется в направлении касательной с мгновенной скоростью $R'\omega$;

б) мгновенная скорость какого-либо элемента радиуса перпендикулярна его направлению; это значит, что элементы радиуса не подвергаются никакому сокращению по сравнению с состоянием покоя.

Отсюда следует, что $R'=R$ " [7].

В дальнейшем содержание парадокса было несколько расширено: вместо цилиндра стали рассматривать колесо или даже движущийся по кругу поезд. Все эти формулировки парадокса по своей сути достаточно близки друг к другу [1, с.309; 2; 5, с.127; 6, 41:05].

Исторически сложилось так, что чаще всего парадокс рассматривался в отношении колеса, причем со спицами. Видимо, это более наглядно демонстрировало возникающий парадокс – обод колеса сокращался, а спицы всегда ортогональны к нему, поэтому сокращаться не должны.

За годы существования парадокса были предложены разные варианте его решения. Например, Ландау и Лившиц приводят следующее объяснение:

"... простое рассуждение, наглядно иллюстрирующее неизбежность возникновения неевклидовости пространства при переходе к неинерциальной системе отсчета. Рассмотрим две системы отсчета, из которых одна (K) инерциальна, а другая (K') равномерно вращается относительно K вокруг общей оси z. ... Наблюдая за этим процессом из системы K, мы найдем, что масштаб, приложенный вдоль окружности, претерпевает лоренцево сокращение, а радиально приложенный масштаб не меняется. Ясно поэтому, что отношение длины окружности к ее диаметру, полученное в результате такого измерения, окажется больше π" [1, с.309].

Система K в рассматриваемом случае – это неподвижная система, из которой производится наблюдение за вращающимся колесом, а система K' – неинерциальная система с неевклидовым пространством-временем, внутреннее пространство на вращающемся диске. Такое решение можно называть традиционным, оно встречается в том или ином виде у разных авторов.

Менее известен вариант парадокса в виде "поезда Эйнштейна". Парадокс возникает, если рассматривать быстрое движение поезда по кругу.

Рассмотрим основной вариант парадокса – парадокса колеса. Более того, будем считать, что диск абсолютно твердый и сплошной, без спиц, то есть, одновременно рассмотрим и вывод из парадокса Эренфеста о невозможности раскрутки такого диска. Для удобства и без нарушения общности представим диск как туго насаженные друг на друга концентрические окружности – ободы достаточно малой толщины и жестко скрепленные друг с другом. Обозначим радиус каждого такого обода R_i. Длина окружности каждого обода будет, соответственно, $2\pi R_i$. Допустим, нам удалось раскрутить диск. Угловая скорость диска ω едина для каждой точки диска и определяет линейную скорость каждого частного обода диска. Тангенциальная скорость каждой точки обода $v_i = \omega R_i$. Сокращенную длину окружности каждого обода определяем по уравнениям Лоренца, традиционно принимая скорость света, равной единице:

$$L_i = 2\pi R_i \sqrt{1 - v_i^2} \quad (1)$$

Рассмотрим два обода: внешний с R_0 и один из внутренних – R_1, пусть $R_1 = kR_0$, где k = 0…1. Из (1) получаем:

$$L_1 = 2\pi k R_0 \sqrt{1 - k^2 v_0^2}$$

$$L_0 = 2\pi R_0 \sqrt{1 - v_0^2}$$

При "раскручивании" диска два эти обода уменьшили свою длину. Следовательно, их новые радиусы равны:

$$R_{1\omega} = \frac{L_1}{2\pi} = kR_0 \sqrt{1 - k^2 v_0^2}$$
$$R_{0\omega} = \frac{L_0}{2\pi} = R_0 \sqrt{1 - v_0^2} \quad (2)$$

Выше мы показали, что отрицать сокращение радиуса обруча, а здесь, соответственно, радиуса каждого обода, нет никаких разумных оснований. Но при этом мы видим весьма странное выражение, которое мы с полным основанием можем назвать поперечным эффектом Лоренца. Действительно, выражения (2) определенно *выглядят* как уравнения преобразований Лоренца для радиуса:

$$R = R_0 \sqrt{1 - v_0^2}$$

Строго в соответствии с предсказаниями СТО радиусы колеса испытывают такое же *эквивалентное* лоренцево сокращение, как и обод колеса. Должно быть понятно, что это всего лишь *следствие* сокращения длины окружности, своеобразный эффект удавки, но совпадение весьма показательно, и именно этот *индуцированный* поперечный эффект Лоренца пытаются опровергнуть все известные авторы.

Продолжим рассуждения и найдем отношение радиусов ободов после раскрутки, которое равно:

$$\frac{R_{1\omega}}{R_{0\omega}} = \frac{kR_0 \sqrt{1 - k^2 v_0^2}}{R_0 \sqrt{1 - v_0^2}} = k \sqrt{\frac{1 - k^2 v_0^2}{1 - v_0^2}}$$

Выражение показывает, что отношение радиусов смежных слоёв зависит от тангенциальных скоростей ободов. Нас должно заинтересовать, какой может быть скорость вращения, чтобы радиусы, отличающиеся в k раз в неподвижном состоянии, после раскрутки *сравнялись*. Видимо, это будет предельная скорость, после которой слои начнут "наползать" друг на друга, препятствуя увеличению скорости вращения. Вычислим это отношение для такого условия:

$$\frac{R_{1\omega}}{R_{0\omega}} = k \sqrt{\frac{1 - k^2 v_0^2}{1 - v_0^2}} = 1 \quad (3)$$

Возводим в квадрат обе части равенства и делаем несложные преобразования и в результате получаем:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

Очевидно, что пересечение, давление этих двух колец друг на друга может начаться, если их диаметры предельно близки, то есть, почти k = 1. Это соответствует скорости:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$$

Полученное решение означает, во-первых, что наше допущение о *возможности* раскрутить диск оказалось правомерным. Во-вторых, мы обнаруживаем, что два соседних бесконечно тонких слоя-обода начнут давить друг на друга только при скорости более 0,7 скорости света. А это, в свою очередь, означает, что при раскручивании каждый обод уменьшает как длину своей окружности, так и соответствующий ей радиус. Следовательно, он не препятствует сокращению, обода, который находится выше него. Точно так же обод, находящийся ниже него, не препятствует и его собственному сжатию. Поскольку рассмотренные ободы все вместе образуют сплошной диск колеса, то это колесо и в целом не испытывает никаких внутренних деформаций, препятствующих его сжатию, радиус колеса будет беспрепятственно уменьшаться.

Сокращаясь по длине, такой "слоёный" обод будет одновременно уменьшать свой радиус кривизны. Но при одном условии: тангенциальная скорость *внешнего* обода колеса не должна превышать таинственной величины – 0,7 скорости света. Почему именно 0,7? Откуда, из каких физических особенностей колеса возникает это число? И что будет, если колесо раскрутить ещё быстрее?

Очевидно, что при достижении этой скорости внешним ободом колеса, скорости всех нижележащих будут заведомо меньше. Следовательно, "волна" перекрытия начнётся с внешней части, и будет постепенно перемещаться внутрь колеса, к его оси. При этом если внешний обод будет раскручен до скорости света, перекрытие слоёв будет только до слоя, имеющего 0,7 исходного радиуса колеса. Все более близкие к оси слои сами по себе перекрывать друг друга не будут. Понятно, что это гипотетическая модель, поскольку пока неясно, что будет происходить со слоями, находящимися от оси дальше, чем √2/2 от исходного радиуса.

Процесс сокращения радиусов слоёв и точка начала их пересечения показаны на диаграмме рис.1. При увеличении тангенциальной скорости внешнего края диска, его слои уменьшают собственные радиусы в разной степени. Сильнее всего уменьшается радиус внешнего края – вплоть до нуля. Видим, что обод, радиус которого равен десятой части от радиуса внешнего края диска, практически не изменяет своего радиуса. Это значит, что при сильной раскрутке внешний обод сократится до радиуса меньшего, чем внутренний, но как это будет выглядеть в реальности, пока неясно.

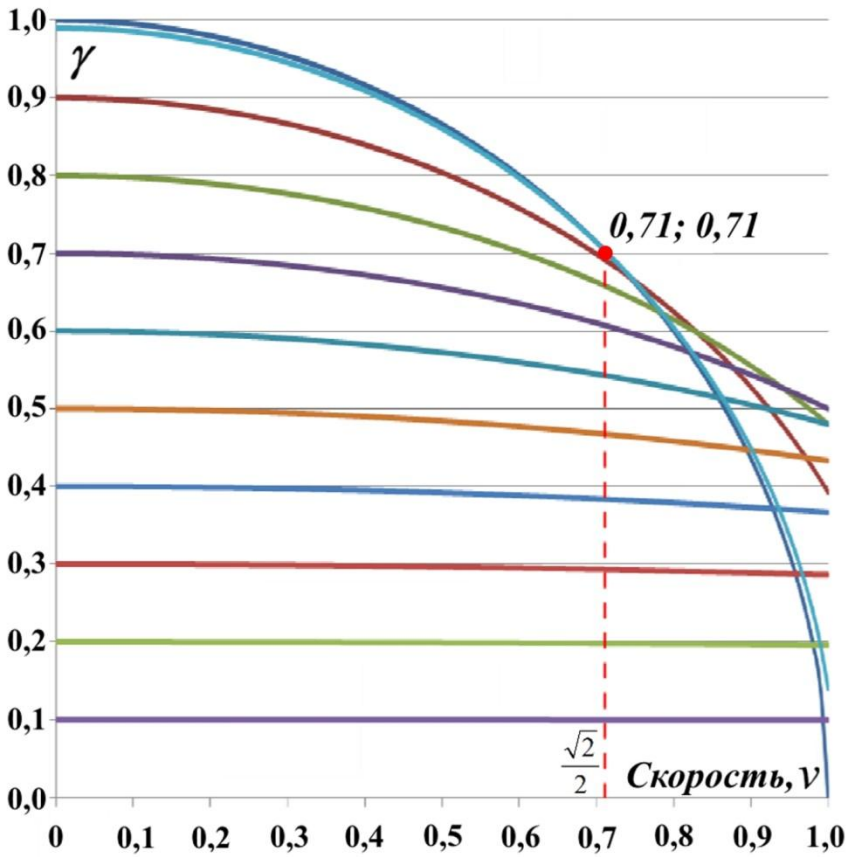


Рис.1. Степени сжатия радиусов ободов в зависимости от их удалённости от центра и скорости внешнего обода.

Пока только очевидно, что деформация наступает лишь при скорости внешнего обода, превышающей √2/2 скорости света. До этой скорости все ободы сжимаются, не пересекая друг друга, без деформации плоскости диска, внешний радиус которого при этом уменьшится до 0,7 от исходного значения. Чтобы наглядно показать эту точку, на диаграмме приведены два смежных внешних слоя обода, имеющие почти одинаковые радиусы. Это первые "кандидаты" на взаимное пересечение при раскручивании.

Если на диск нанести равномерно концентрические окружности, через равные интервалы, то в процессе его раскручивания для внешнего наблюдателя эти окружности будут располагаться с интервалами, равномерно уменьшающимися от центра (практически исходная величина интервала) к периферии (уменьшающийся вплоть до нуля).

Для того чтобы выяснить, что произойдёт с колесом после превышения внешним ободом скорости 0,7 от скорости света, изменим форму колеса так, чтобы слои не мешали друг другу. Сдвинем слои колеса вдоль оси, превратив колесо в тонкостенный конус, воронку. Теперь при сжатии каждого слоя под ним нет других слоёв, и ничто не мешает ему сжиматься сколько угодно. Начнём раскручивать конус из состояния покоя до скорости 0,7 от скорости света и затем до скорости света, после чего уменьшим скорость в обратной последовательности. На следующем рисунке этот процесс показан в виде нескольких кадров из анимации. На рисунке конус показан в двух видах: вдоль оси, как всегда изображается парадокс колеса, и перпендикулярно к оси, вид сбоку, на котором виден "профиль" конуса. На рис.2a, на виде вдоль оси конуса мы видим поведение каждого обода конуса. Каждый из этих слоёв изображен цветной линией. Эти линии повторяют соответствующие окружности, ободы, для которых построены графики на диаграмме рис.1. Это позволяет увидеть каждый обод независимо от других и то, как внешний обод уменьшает свой радиус сильнее, чем внутренние. На рис.2b показаны его 6 состояний, виды конуса сбоку, соответствующие различным скоростям вращения.

Согласно теории относительности деформации диска или показанного конуса как таковой быть не должно. Все изменения в его форме – это видимость для внешнего наблюдателя, с самим диском и конусом при этом ничего не происходит. Следовательно, он вполне может быть из абсолютно твердого материала. Поэтому *видимость*, относительность деформации и допускает раскручивание этого диска до световой скорости.

Внешний наблюдатель будет видеть, как показано на кадрах, вполне логичную, хотя и довольно странную картину. Внешний обод конуса уменьшается до скорости 0,7с, причем все ободы сокращаются синхронно, не "налезая" диаметрами друг на друга. После достижения этой скорости внутренний обод, который имел меньший радиус, оказывается с внешней стороны. По раскраске на кадрах видно, как внешние ободы приближаются к центру диска, превращая конус в своеобразный замкнутый сосуд, амфору. Если уменьшить скорость его вращения, то все слои вернутся на свои места, и амфора для неподвижного наблюдателя вновь превратится в конус. Это кажущееся перемещение слоёв, ободов вследствие сжатия к центру диска с точки зрения внешнего наблюдателя никак не связано с реальной деформацией самого диска.

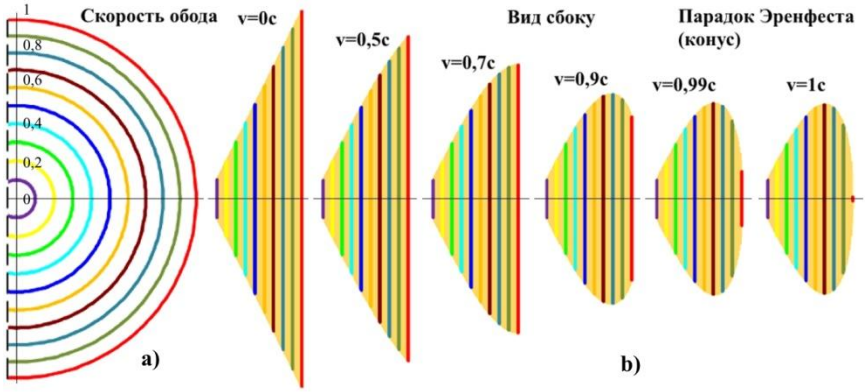


Рис.2. Лоренцева деформация конуса при раскручивании. a) вид правой половины конуса вдоль оси; b) кадры из анимации [7], соответствующие виду конуса "с ребра" при различных скоростях вращения.

Но это относится к конусу. А как поведёт себя плоское колесо, в котором все слои находятся друг над другом? И в этом случае неподвижный наблюдатель увидит весьма странную картину. После того как внешний обод диска уменьшится на скорости 0,7с, он сделает попытку дальнейшего сжатия. При этом внутренний обод, который имел *меньший* радиус, будет сопротивляться этому. Здесь мы напомним очевидное условие – диск всё время должен оставаться плоским.

При всей странности картины можно достаточно легко догадаться, что произойдёт дальше. Нижние слои, от нуля до 0,7 от радиуса колеса, сами испытали сжатие и несколько уменьшили свои размеры. Не смотря на это внешние слои их всё равно "догнали". Теперь лоренцева сжатия внутренних слоёв недостаточно, они не дают внешним продолжить собственное сжатие. Как варианты мы можем выделить три сценария дальнейшего развития событий, не принимая во внимание действие центробежных сил и тот факт, что для такой раскрутки потребуется бесконечно мощный двигатель.

Варианты вращения

Обычный (хрупкий) материал. Для обычного материала при взаимодействии слоёв-ободов внутренние слои испытывают деформацию сжатия, а внешние – растяжения. Следовательно, более вероятен разрыв внешних ободов, чем упругое уменьшение объёма внутренних. Это очевидно, поскольку материал их один и тот же. Впрочем, следует заметить, что это очевидно не для всех. Один из читателей выразил по этому поводу недоумение, что внешние слои не *сжимаются*, а *растягиваются*, причем акцентировал эти слова. Однако достаточно просто рассмотреть, например, футбольный мяч. Внутри него воздух *сжат*, а кожа мяча – *растянута*. То, что внешний обод растягивается, вовсе не означает отсутствие релятивистского сжатия, поскольку он растягивается именно вследствие последнего. Иначе говоря, в данном случае происходит *относительное* сжатие-растяжения: на внутренние слои действует сжимающая сила внешних слоёв, поэтому на сжимающий слой действует ответная растягивающая сила.

Другой пример. Если растянуть обычный резиновый шнур, то как можно описать его состояние? Шнур, очевидно, стремится сжаться (наподобие релятивистского сжатия), однако при этом он испытывает и указанное усилие растяжения. Еще более близким примером является сжатие нагретой и закрепленной за концы металлической струны. Остывая, она стремится сократиться и при этом испытывает усиливающееся натяжение. Такой же принцип используется в машиностроении. Нагретое (расширившееся) кольцо надевают на ось. Остывая, кольцо *сжимается*, уменьшает свои размеры (почти релятивистски), но ось препятствует этому, вызывая в кольце усилие *растяжения*.

На рис.3 показан процесс разрушения хрупкого кольца. Раскраска полос, слоёв на рисунке

сделана наподобие "тельняшки" – светлые цвета чередуются с более тёмными. В этом случае при сжатии диска на его разрезе лучше видно, что слои не пересекают друг друга, а складываются "гармошкой".

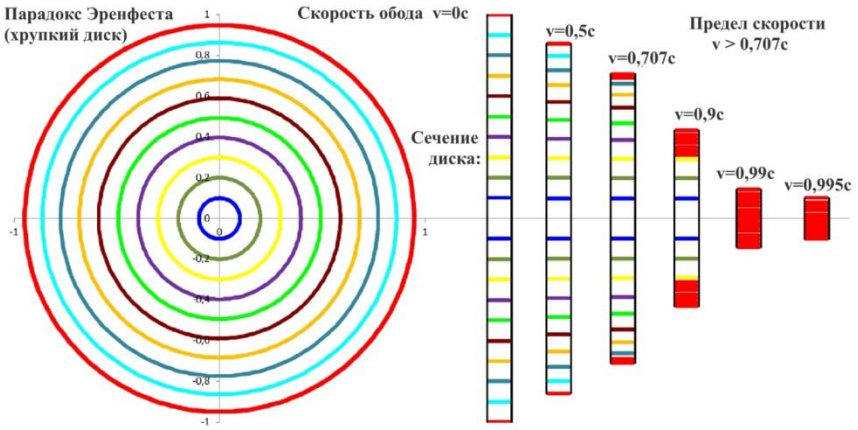


Рис.3 Деформация диска из обычного твердого материала

На рисунке в красный цвет перекрашены слои (ободы), которые приходят в тесное соприкосновение, с силой давят друг на друга. В этом случае их материал испытывает как усилие на сжатие (внутренние слои), так и усилие на растяжение (внешние слои). При некоторых усилиях внешние слои, что более вероятно, просто будут разорваны, и разлетятся в разные стороны. Как видно на рисунке, условия для разрыва наступают после достижения предельной скорости 0,7с. Но особо следует отметить, что объект разрушает не собственно лоренцево сокращение, а вызванные им внешние силы, которые стремятся вернуть этот объект в исходное состояние. Что произойдёт, если вращающееся колесо в виде кольца или обруча насажены на толстую ось? Колесо будет стремиться уменьшить свой диаметр, но ось *препятствует* этому. То есть виртуальное релятивистское сокращение встречает вполне *реальное* физическое сопротивление. Кто эту силу сопротивления создаёт? Тот, кто приводит колесо во вращение. Его энергия и приводит к деформации колеса.

Точно такое явление наблюдается в парадоксе Белла с ускоряющимися ракетами, связанными тросом. Строго доказано, что трос будет физически, *реально* растянут вплоть до разрыва. То есть, якобы "виртуальное" сокращение ведёт к *механическому* разрыву. Представим *уже сократившийся* релятивистски трос. Затем *мы физически, насильно возвращаем ему исходную длину*. И это уже никакая не виртуальная, не иллюзорная, а реальная внешняя сила. Именно она и ведёт к разрыву. Можно сказать и иначе, движители, ракеты, ускоряющие трос и фактически находящиеся в его системе отсчета, препятствуют его сокращению, вытягивают его, чтобы *внешний* наблюдатель видел его длину *прежней*.

Абсолютно эластичный материал. Для такого материала картина немного иная. Разрыв слоёв невозможен, но возможно их бесконечное сжатие. Следовательно, при скорости внешнего обода, близкой к скорости света, для внешнего наблюдателя колесо может превратиться в бесконечно малую точку. Это в том случае, если на сжатие будет необходимо меньшее усилие, чем на растяжение. Иначе форма колеса при равенстве этих сил будет оставаться неизменной. После прекращения вращения колесо примет свои первоначальные размеры без каких бы то ни было повреждений. Эластичные слои-ободы складываются в виде "гармошки", не пересекая друг друга [7]. Диск, видимо, должен при сжатии принять форму бублика, поскольку внутренние слои при сжатии увеличиваются в ширину, вдоль оси. При достижении скорости внешнего обода, равной скорости света, центр диска сожмётся в точку, выдавив по бокам два пузыря.

И вновь приведём соображения нашего читателя по этому поводу. На его взгляд является противоречием, что при радиальном сокращении колеса, уменьшении его диаметра внешний наблюдатель должен увидеть источник света, находящийся позади колеса, и закрываемый им до начала вращения. Из этого он делает вывод, по сути, меняя местами причину и следствие: поскольку источник *не может стать видимым*, то, следовательно, и сокращения диаметра также быть не может. Причиной видимости источника, по его мнению, может быть лишь прозрачность колеса, аберрация или некие пока несуществующие теории.

Но это ошибочное мнение, никакого парадокса нет, поскольку источник действительно *будет виден* и именно по причине уменьшения диаметра колеса. Приведём похожий пример для линейного движения. Если есть перегородка с отверстием и задвижка, в точности равная ему по площади, то

свет из-за перегородки не достигнет наблюдателя. Но если задвижка будет двигаться и испытает лоренцево сокращение, то не будет ни одного момента времени, когда она сможет перекрыть свет *полностью*. Будет наблюдаться примерно такой же эффект, как при прохождении экзопланеты на фоне материнской звезды. Будет уменьшение яркости светового потока до некоторой ненулевой величины. Если же взять длинный ряд встык одинаковых задвижек, то при малой скорости они полностью перекроют световой поток, а при субсветовой скорости – полностью его откроют.

Как вариант, можно произвести выстрел над колесом с превышением, чуть более 0,7 от его диаметра, и пуля его не заденет. Более того, можно на вращающееся колесо надеть трубу, диаметр которой меньше диаметра колеса в неподвижном состоянии, но чуть больше того, до которого колесо уменьшилось. И труба не будет мешать колесу вращаться. Но если колесо замедлится, то, увеличиваясь в диаметре, оно придёт в контакт с трубой со всеми возможными последствиями – трение с искрами, разрушение, резкое торможение, прокручивание трубы и тому подобное.

Далее можно заметить, что читатель, судя по всему, не обратил внимания на очень важные моменты, что видно, в частности, из его вывода, будто приведённые в статье вычисления касаются *только* тангенциальной скорости и не затрагивают радиального направления. Но в статье приведены самые развернутые доказательства наличия именно *радиального* сокращения, а расчеты прямо касаются *всей* окружности, состоящей, разумеется, из бесконечного числа бесконечно малых отрезков, релятивистское сокращение которых ведёт к соответствующему укорочению и всей окружности.

Абсолютно твердый материал. Для абсолютно твердого материала колеса, который не сжимается, не растягивается и не изгибается, картина также будет отличаться от предыдущих. Внешние ободы не могут разорваться, а внутренние – сжаться. Поэтому, разрушения ни тех, ни других не будет, но будет стремительно возрастать сила их давления друг на друга после того, как будет достигнута предельная скорость вращения. Но за счет каких источников возникает эта сила? Очевидно, за счет движителя, приводящего колесо во вращение. Следовательно, этот движитель должен будет прикладывать всё большее и большее усилие вплоть до бесконечности. Понятно, что это невозможно, и мы приходим к выводу: при достижении внешним ободом абсолютно твердого колеса тангенциальной скорости √2/2 от скорости света дальнейшего увеличения этой скорости не будет. Приводной двигатель словно упрётся в стену. Это примерно то же самое, как бежать, например, за тракторной тележкой, прицепом. Можно бежать с любой скоростью, но при достижении тележки скорость будет сразу же ограничена скоростью трактора.

Почему √2/2?

Представленные вычисления показали, что величина скорости внешнего обода, при которой начинается его деформация, то есть давление слоёв друг на друга, имеет довольно странное значение – √2/2. Замечаем, что эта величина равна синусу или косинусу угла в 45°. Если посмотреть на рис.1, можно заметить, что график зависимости лоренцева коэффициента (радиуса) от тангенциальной скорости внешнего обода является окружностью. Действительно, по определению этот график описывается уравнением, которое также прямо следует из нижнего уравнения системы (2), для радиуса R_0=1:

$$\gamma = \sqrt{1 - v^2} \quad (4)$$

где

γ – коэффициент Лоренца;

v – скорость внешнего обода колеса.

Преобразуем уравнение (4):

$$\gamma^2 = 1 - v^2$$

$$\gamma^2 + v^2 = 1$$

Это уравнение окружности с радиусом 1. Далее, проверив остальные графики, мы обнаружим, что все они являются эллипсами:

$$\gamma = k\sqrt{1 - k^2 v^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\gamma^2}{k^2} + k^2 v^2 = 1$$

где k – меньшая полуось эллипса, поскольку $k \le 1$, а произведение его полуосей равно единице.

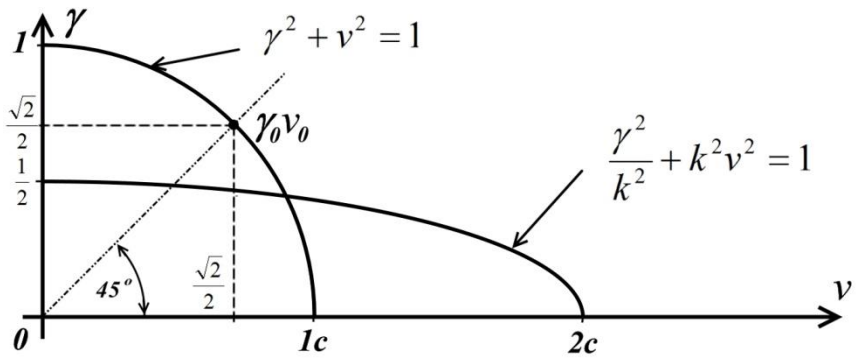


Рис.4. Релятивистское касание слоёв колеса

Внутреннее касание соседних ободов начинается тогда, когда их радиусы становятся равными (2). Это касание соответствует пересечению соответствующего эллипса и внешней окружности (рис.4).

Координаты точки пересечения окружности и эллипса являются решением системы:

$$\begin{cases} \gamma^2 + v^2 = 1 \\ \dfrac{\gamma^2}{k^2} + k^2 v^2 = 1 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

$$\gamma^2 = \frac{k^2(1-k^2)}{1-k^4}$$

Из первого уравнения системы находим квадрат скорости:

$$v^2 = 1 - \gamma^2 = 1 - \frac{k^2(1-k^2)}{1-k^4} = \frac{1-k^2}{1-k^4}$$

Если мы произведем сокращение в этих дробях, то должны исключить из решений значение k = 1, соответствующее *единственному* слою, поэтому:

$$\begin{cases} \gamma^2 = \dfrac{k^2}{1+k^2} \\ v^2 = \dfrac{1}{1+k^2} \end{cases}$$

Анализ системы решений показывает, что точки пересечения эллипсов всех частных слоёв колеса "движутся" снизу вверх по окружности от нулевого значения $R_i = 0$ вплоть до касания окружности изнутри, без слияния с нею, поскольку $k \neq 1$. Из системы также видно, что значения v и γ при этом в пределе и достигают значения √2/2:

$$\lim_{k\to 1} \gamma = \lim_{k\to 1} v = \lim_{k\to 1} \sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}} = \lim_{k\to 1} \sqrt{\frac{1}{1+k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Тем не менее, все-таки не вполне ясно, почему предел равен именно этой величине? Однако эллиптический характер графиков рис.2 сам даёт подсказку. При увеличении коэффициента k от нуля до единицы эллипсы "округляются", сливаясь, в конечном счете, с окружностью графика внешнего обода колеса. А что если и график внешнего обода тоже является неким пределом подобных эллипсов? В этом случае его эллипсы должны быть ортогональными, то есть, его полуоси симметричны полуосям эллипсов внутренних слоёв:

$$\begin{cases} k^2\gamma^2 + \dfrac{v^2}{k^2} = 1 \\ \dfrac{\gamma^2}{k^2} + k^2 v^2 = 1 \end{cases} \quad (4)$$

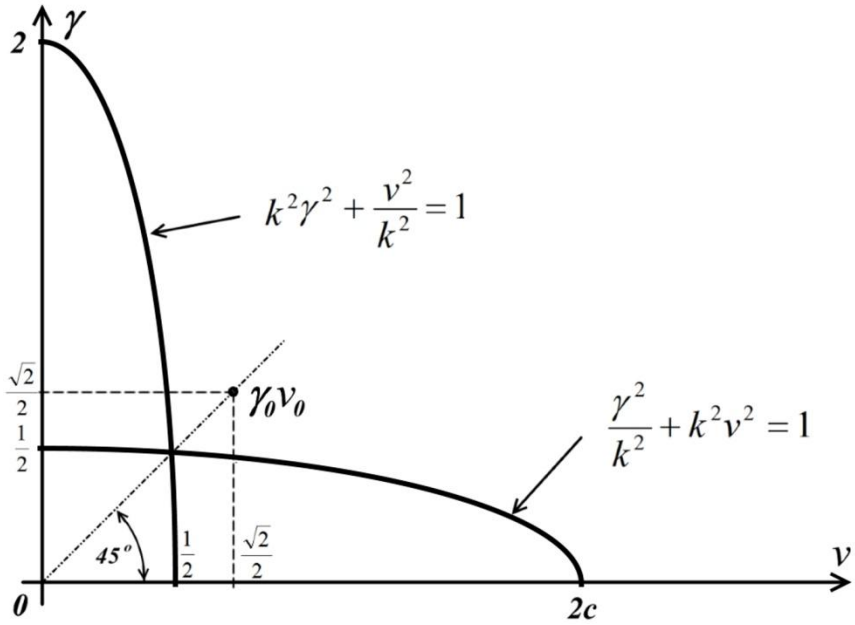


Рис.5. Пересечение ортогональных эллипсов

Графически эти эллипсы будут иметь вид рис.5. Решая новую систему (4), находим:

$$v^2 = k^2 \frac{1-k^4}{1-k^8}$$

Находим значение второй переменной:

$$\gamma^2 = k^2(1-k^2v^2)$$

$$\gamma^2 = v^2 = k^2 \frac{1-k^4}{1-k^8}$$

Как и выше здесь мы исключаем решение k = 1, соответствующее слиянию эллипсов, поскольку мы рассматриваем всегда *два* сблизившихся эллипса. Поэтому:

$$\gamma^2 = v^2 = \frac{k^2}{1+k^4}$$

Полученное решение означает, что точки пересечения всех эллипсов всегда находятся на биссектрисах квадрантов (рис.5).

Исходя из этого, мы с полным основанием можем присвоить это же значение и полному *слиянию* эллипсов:

$$\lim_{k\to 1}\gamma = \lim_{k\to 1} v = \lim_{k\to 1}\sqrt{\frac{k^2}{1+k^4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Это значение предельное, максимальное, поскольку это точка пересечения с биссектрисой квадранта *окружности* единичного радиуса.

Из этого же мы можем сделать вывод: это значение соответствует и случаю пересечения окружности и "растущих" эллипсов внутренних слоёв, считая, что окружность – это предварительно "выросший" ортогональный эллипс, соответствующий графику скоростей внешнего обода вращающегося круга. Поскольку все точки пересечения эллипсов лежат на биссектрисах, имеющей угол наклона 45°, то координаты точки её пересечения с окружностью единичного радиуса определяются как $\sin 45^o = \cos 45^o = \sqrt{2}/2$. Очевидно, что для одинакового коэффициента полуосей – k ортогональных эллипсов точки их пересечения всегда лежит на биссектрисах. В случае разных коэффициентов точки пересечения могут "двигаться" по произвольным кривым, заканчивающимся на биссектрисах.

Парадокс поезда Эйнштейна

Заметим, что в оригинальной, исходной формулировке парадокса Эренфеста речь шла не о колесе и спицах, а о сплошном цилиндре. Исторически сложилось так, что со временем стали говорить именно о колесе, причем зачастую о колесе со спицами. Видимо, это более наглядно демонстрировало возникающий парадокс – обод колеса сокращался, а спицы или полотно сплошного колеса ортогональны к нему, поэтому сокращаться не должны. Однако, это не единственный вариант

формулировки парадокса. Есть менее известный вариант в виде "поезда Эйнштейна". Этот вариант показан в научно-популярном документальном фильме EBS "Физика света" [6].

Рис.6. Окружность можно представить в виде ряда соединенных сегментов, каждый из которых – вагон (светлый цвет) поезда или локомотив (темный цвет). "Кусок ваты" – это дым из трубы локомотива (паровоза) [6, 35:05].

Кадры фильма (в скобках – время кадров в минутах) сопровождает соответствующий дикторский текст:

"Ускорение – серьезная проблема. Ускорение – результат либо изменения скорости, либо направления. Наиболее распространенный тип ускорение возникает в результате кругового движения. Окружность можно представить в виде ряда соединенных сегментов. Предположим что каждый сегмент это поезд" [6].

Парадокс возникает, как указывают авторы фильма, если рассматривать быстрое движение поезда по кругу:

"Согласно специальной теории относительности поезда при вращения становятся короче (35:20). Чем быстрее они несутся, тем короче должны становиться. Диаметр круга не изменяется, не изменяется и значение числа π. Почему же сокращается длина окружности (35:42)?"

Рис.7. Чем быстрее движется поезд, тем короче он становится. Кадр из фильма [6, 40:45] показывает движение состава по кругу. Светлый шлейф – дым из трубы паровоза.

Решение, предложенное Эйнштейном, как говорится в фильме, заключается в искривлении пространства и изменении значения числа π:

"Эйнштейн применил открытие Римана к решению проблемы кругового движения. Поезда, движущиеся по кругу, становятся короче, потому что искривляется пространство. А в таком пространстве иным становится значение числа π" [6, 41:05].

Такое решение можно называть традиционным, оно встречается в том или ином виде и у других исследователей и в интернете. Но вот на что следует обратить внимание. Сокращение длины поезда видит *внешний* наблюдатель, для которого нет абсолютно никакой разницы, движутся ли вагоны прямолинейно или по окружности. Именно такой второй вариант рассматривал Эйнштейн и в работе "К электродинамике движущихся тел". Там замедление темпа хода часов на экваторе напрямую связывалось с лоренцевым замедлением времени, изначально сформулированным для прямолинейного движения. Сокращение поезда с точки зрения неподвижного наблюдателя

прекрасно вписывается в вариант парадокса часов, движущихся по окружности. Нужно лишь использовать преобразования Лоренца не для замедления хода часов, а для сокращения длины отрезка. Как следствие сокращение поезда уже не имеет никакой связи со значением числа π.

При этом следует помнить, что движется поезд, а не рельсы. С ними, понятно, ничего не происходит. Если поезд не замкнут, то есть, последний вагон не прицеплен к локомотиву спереди, а движется на некотором удалении от него, то вообще не будет наблюдаться никаких изменений *диаметров* окружностей – ни рельсов, ни поезда. Сокращение *длины* поезда будет приводить к тому, что локомотив, догоняя свой последний вагон, тем не менее, будет все больше удаляться от него, всегда оставаясь на рельсах.

Если же поезд изначально замкнут, то его лоренцево сокращение приведет к тому, что поезд просто соскочит с рельсов внутрь круга. Его более короткой длине теперь будет соответствовать более короткая длина окружности, у которой, естественно, меньше радиус, что совсем не требует никаких изменений значения числа π.

Изгибающий эффект Лоренца

Помимо обнаруженного подобия поперечного эффекта Лоренца можно наблюдать еще более интересный косвенный *изгибающий эффект* Лоренца, когда помимо сокращения длины движущегося тела происходит его *релятивистский* изгиб. Рассмотрим вариант парадокса поезда Эйнштейна, но вместо рельсов и гибкого состава из вагонов возьмем сегмент жесткой дуги, вращающейся по окружности (рис.8).

Очевидно, что, как и в случае вращающегося колеса, внешняя часть дуги испытает большее лоренцево сокращение, чем внутренняя. Однако, также очевидно, что отсутствие жесткого радиуса вращение не приведёт к изменению собственных радиусов этих частей, а вызовет лишь изменение их линейных или угловых размеров. Результирующий характер деформации дуги пока неясен, но можно предположить, что она будет напоминать поведение биметаллической пластины при изменении её температуры.

Если традиционный незамкнутый поезд Эйнштейна в процессе движения просто укоротится, то жесткая конструкция дуги, как и биметаллической пластины, видимо, должна привести к её деформации, изгибу, причём во внешнюю сторону, поскольку внешняя часть дуги уменьшает свою длину сильнее, чем внутренняя.

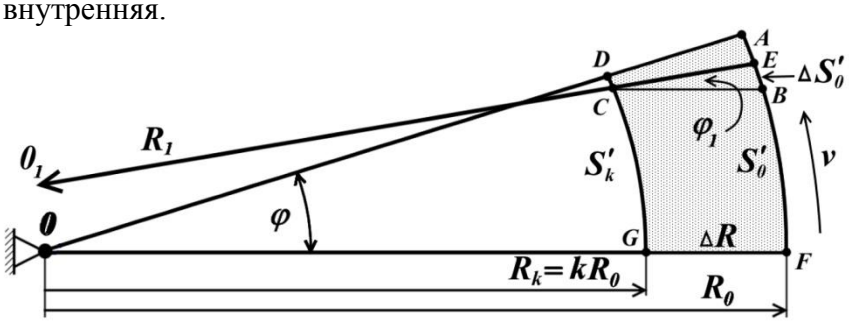


Рис.8. Вращение тонкой дуги окружности

Рассмотрим вариант достаточно тонкой дуги, имеющей внешний радиус R_0, внутренний $R_k = kR_0$, где $k \approx 1$, но $k \neq 1$, и небольшой угол дуги φ (рис.8). Согласно этим условиям:

$$\frac{R_k}{R_0} = \frac{S_k = \varphi R_k}{S_0 = \varphi R_0} = \frac{kR_0}{R_0} = k$$

После раскручивания дуги её длина уменьшилась, причем внутренняя сторона сократилась меньше, чем внешняя. Подобно эффекту биметаллической пластины это ведёт к изгибу дуги. Новый радиус кривизны определяем по точке пересечения линий, соединяющих края дуг. Угол φ_1 между новыми радиусами кривизны дуги соответствует соотношению:

$$tg\,\varphi_1 \approx \frac{\Delta S_0'}{\Delta R}$$

Пометим характерные точки дуги буквами A...G и запишем соотношения для длин и углов:

$$\Delta R = GF = R_0(1-k)$$

Угол φ_1 = ECB. Теперь найдем величину нового радиуса дуги $R_1 = 0_1F = 0_1E$.

$$\frac{0_1F}{GF} \approx \frac{EF}{EB}$$

Из чего находим этот новый радиус дуги

$$0_1F = R_1 = \frac{GF \times EF}{EB} = \frac{\Delta R \times \Delta S_0'}{S_0' - S_k'}$$

$$R_1 = \frac{R_0(1-k) \times S_0'}{S_0' - S_k'} = \frac{R_0(1-k) \times S_0\sqrt{1-v^2}}{S_0\sqrt{1-v^2} - kS_0\sqrt{1-k^2v^2}}$$

Сократив, получаем соотношение:

$$R_1 = R_0 \frac{(1-k) \times \sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-v^2} - k\sqrt{1-k^2v^2}}$$

Полученное соотношение можно назвать *уравнением изгибающего эффекта Лоренца*, поскольку оно определенно описывает изменение кривизны, изгиба дуги вследствие лоренцева эффекта при её движении:

$$R_1 = R_0 \frac{1-k}{1 - \frac{k\sqrt{1-k^2v^2}}{\sqrt{1-v^2}}} \quad (5)$$

Следует понимать, что этот эффект изгибания такой же *косвенный*, как и поперечный эффект Лоренца, поскольку изгибание дуги происходит вследствие *обычного* лоренцева сокращения движущихся тел. Заметим, что в знаменателе правое слагаемое нам уже встречалось – (3). При стремлении коэффициента k к единице ($k \neq 1$) оно обращается в единицу при величине скорости $v_0 = \sqrt{2}/2$. Рассмотрим четыре интервала значений скорости вращения дуги.

На интервале $v < v_0$ дуга имеет искривление того же знака, что и исходное, поскольку $R_1 > 0$. Действительно, найдем предел отношения правых слагаемых в дроби:

$$\lim_{k\to 1} \frac{k}{\frac{k\sqrt{1-k^2v^2}}{\sqrt{1-v^2}}} = \lim_{k\to 1} \frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-k^2v^2}} \leq 1$$

Результат означает, что числитель в (5) стремится к нулю медленнее, чем знаменатель, поэтому вся дробь положительна и *стремится* к бесконечности, не достигая её, поскольку правое слагаемое в знаменателе равно единице только при $v = v_0$, не входящей в рассматриваемый интервал.

При скорости $v = v_0$ новый радиус кривизны R_1 обращается в бесконечность, то есть, дуга превращается в прямую линию. Чтобы показать это преобразуем правое слагаемое в знаменателе для v_0:

$$\frac{k\sqrt{1-k^2v^2}}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{k\sqrt{1-\frac{k^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = k\sqrt{2-k^2} > k$$

Это неравенство совершенно очевидно, поскольку при $k < 1$ величина под корнем всегда больше единицы. Следовательно, при стремлении k к единице знаменатель стремится к нулю быстрее, чем числитель, поэтому дробь в выражении для R_1 обращается в бесконечность, то есть, $R_1 \equiv \infty$.

На открытом интервале скорости вращения $v > v_0$ и отношении радиусов дуги $k < 1$, новый радиус кривизны становится отрицательным $R_1 < 0$, то есть, дуга приобретает искривление, противоположное исходному. Мы не будем искать предела отношения правых слагаемых в дроби, а просто вычислим некоторые значения радиуса R_1. Сначала для $k = 0{,}99$ и скорости v, близкой, но все-таки большей v_0:

$$R_1 = R_0 \frac{1-0{,}99}{1 - \frac{0{,}99\sqrt{1-0{,}99^2 \times 0{,}72^2}}{\sqrt{1-0{,}72^2}}} \approx -8{,}9R_0$$

Затем вычислим радиусы для нескольких равных значений скорости и коэффициента $k = v$. Для этого соответственно упростим выражение:

$$R_1 = R_0 \frac{1-k}{1-\frac{k\sqrt{1-k^2v^2}}{\sqrt{1-v^2}}} = R_0 \frac{1-k}{1-k\sqrt{\frac{1-k^4}{1-k^2}}} = R_0 \frac{1-k}{1-k\sqrt{1+k^2}}$$

Теперь вычислим три значения радиуса R_1:

$$k = 0{,}9 \quad R_0 \frac{0{,}1}{1-0{,}9\sqrt{1+0{,}81}} \approx -\frac{0{,}1}{0{,}2} R_0 = -\frac{1}{2} R_0$$

$$k = 0{,}99 \quad R_0 \frac{0{,}01}{1-0{,}99\sqrt{1+0{,}99^2}} \approx -\frac{0{,}01}{0{,}4} R_0 = -\frac{1}{40} R_0$$

$$k = 0{,}999 \quad R_0 \frac{0{,}01}{1-0{,}999\sqrt{1+0{,}999^2}} \approx -\frac{0{,}001}{0{,}4} R_0 = -\frac{1}{400} R_0$$

Как видим, новый отрицательный радиус R_1 при увеличении скорости вращения и уменьшения толщины дуги стремится к нулю, то есть, дуга фактически сворачивается в точку.

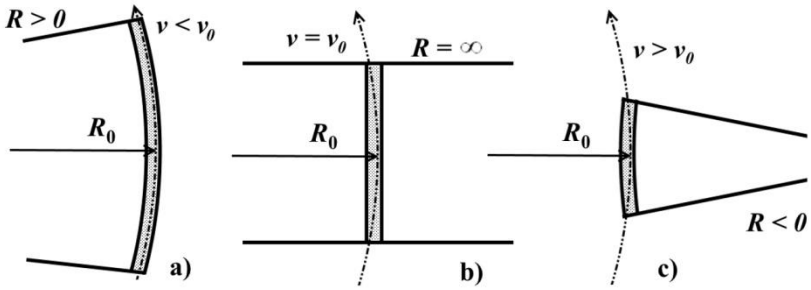


Рис.9. Искривление дуги при вращении

На рис.9 показаны рассмотренные три варианта изгибания вращающейся дуги. Радиус, по которому вращается дуга, равен R_0, а R –радиус кривизны вращающейся дуги. Штрих-пунктирной линией обозначена траектория, по которой движется дуга.

В заключение заметим, что однослойная дуга, то есть, дуга, имеющая нулевую толщину $k \equiv 1$, свою кривизну не изменяет независимо от скорости – $R_1 \equiv R_0$:

$$R_1 = R_0 \frac{1-k}{1-\frac{k\sqrt{1-k^2v^2}}{\sqrt{1-v^2}}} = R_0 \frac{1-k}{1-k\sqrt{\frac{1-v^2}{1-v^2}}} = R_0 \frac{1-k}{1-k} \equiv R_0$$

В рассмотренных примерах величину $(1-k)$ можно рассматривать как условную толщину слоя, дуги. И здесь следует заметить, что, по всей видимости, колесо со спицами и сплошное колесо в формализме парадокса Эренфеста не вполне тождественны, хотя есть иное мнение:

"... с принципиальной точки зрения ничто не изменится также и в том случае, если колесо со спицами будет заменено сплошным диском" [5, с.128].

Если сплошное колесо разрезать по радиусу хотя бы в одном месте, то, скорее всего, при его вращении будет наблюдаться эффект как при поджаривания кружочка колбасы – угол разреза будет просто увеличиваться.

Если же колесо со спицами не имеет разреза, тогда, вероятно, будут наблюдаться также и общеизвестные варианты парадокса: вследствие эффекта удавки колесо может изогнуться в "чашу" [5, с.128, рис.57] или как на рис.2. При сохранении его плоскостности спицы будут ободом либо радиально сжаты, либо изогнуты как галактические рукава или наподобие свастики, как показано на рисунке [4].

К радиальному сокращению спиц колеса приводит их *стягивание внешним ободом*, испытывающим лоренцево сокращение. Отсутствие такого обода означает и отсутствие кольцевого стягивания и, соответственно, радиального сокращения спиц. Таким образом, раскручивание колеса, состоящего из одних только спиц, очевидно, приведёт к их утончению, но не укорочению. Однако к классическому парадоксу Эренфеста это не имеет никакого отношения.

В официальной рецензии на один из вариантов данной статьи можно обнаружить довольно завуалированную подмену понятий, видимо, не умышленную. При этом заметим, что этот довод дословно совпадает с формулировкой Ландау-Лившица [1, с.309]. Этот довод и в рецензируемой

статье и здесь выше аргументированно опровергается. Довольно странно, что рецензент приводит в качестве ответного опровержения то, что, собственно, и опровергается:

"Масштабы же в направлениях перпендикулярных не изменяются".

Подмена понятий состоит в том, что в парадоксе колеса (цилиндра) речь *явным* образом идёт о его *собственном* радиусе. Радиус колеса и лежащий *рядом* с ним масштаб (линейка) – это *разные* вещи. Если метки масштаба нанесены прямо на колесо, на радиус (в состоянии покоя), то этот вариант масштаба испытает точно такое же сокращение, как и радиус колеса. Если же масштабная линейка *лежит* на поверхности колеса (на спице), то линейка, масштаб при сокращении радиуса колеса останется неизменным, а просто выдвинется за пределы колеса, обода. Согласно классической геометрии и элементарной логике: если длина окружности сократилась, то это означает и сокращение её радиуса.

В частности, при вращении простого колеса со спицами, например, как [5, с.127, рис.56], имеющего разрез обода в одном месте, очевидно, будет наблюдаться довольно интересная картина. Примем, что спицы абсолютно гибкие и внутренние их концы свободно вращаются на оси колеса. Схематично в исходном состоянии колесо показано на рис.10а. На малых скоростях разрез будет просто увеличиваться, а спицы будут сближаться, складываться наподобие веера рис.10б. При скорости 0,7с обод, как и дуга, вытянется в прямую линию длиной 0,7 от исходной длины обода L_0. При этом внутренние спицы будут сжаты, а внешние – растянуты рис.10в. Далее рассмотрим, как будет выглядеть такое колесо, раскрученное более чем до 0,7с. Удобно рассмотреть частный случай его искривления, когда радиус кривизны в точности равен исходному, но направлен противоположно (5). Это условие, напомним, означает, что новый радиус имеет отрицательный знак:

$$R_1 = R_0 \frac{1-k}{1-\dfrac{k\sqrt{1-k^2v^2}}{\sqrt{1-v^2}}} = -R_0$$

Произведём тривиальные преобразования, в результате которых получаем:

$$v^2 = \frac{4(k-1)}{k^4-(2-k)^2}$$

Замечаем, что k = 1 является корнем уравнения в знаменателе, следовательно, дробь можно сократить на (k – 1), поскольку по условиям задачи это решение должно быть отброшено (слоёв два). После сокращения находим предел квадрата скорости при утончении дуги:

$$v^2 = \lim_{k\to 1}\frac{4}{4+k^2(k+1)} = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3}$$

Это та скорость $\approx 0{,}816$с, при которой дуга изменит свой изгиб в точности на противоположный. Соответственно, новая длина дуги L при этой скорости будет равна

$$L = L_0\sqrt{1-v^2} = L_0\sqrt{1-\frac{2}{3}} \approx 0{,}58L_0$$

Это состояние колеса показано на рис.10г:

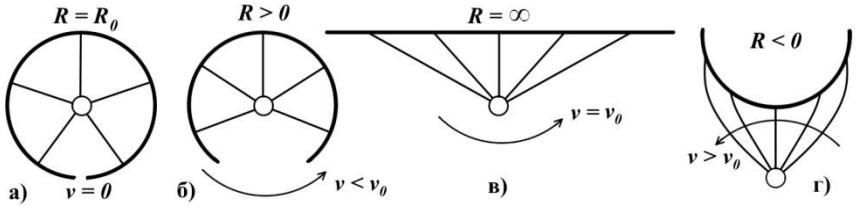


Рис.10. Вращение колеса со спицами и разрезанным ободом

Выводы

Сначала отметим, что все обнаруженные в статье явления и эффекты – это результаты анализа мысленных экспериментов строго в рамках *математики* специальной теории относительности. При этом заметим, что в реальном эксперименте фотография диска, раскрученного до огромной скорости, вопреки предсказанию теории не позволила обнаружить изменение его размеров [3]. Вместе с тем, даже в рамках формализма теории оказалось, что некоторые выводы являются ошибочными. В частности это вывод о невозможности привести во вращение абсолютно твердое тело, который определенно не соответствует корректным предсказаниям теории относительности:

"Рассуждение Эренфеста показывает невозможность приведения абсолютно твёрдого тела (изначально покоившегося) во вращение" [2].

Считается, что в специальной относительности абсолютно твердое тело невозможно по определению, поскольку оно позволяет производить сверхсветовую передачу сигналов. Поэтому математика теории к таким телам неприменима изначально. Тем не менее, такое тело, как мы показали, можно раскрутить до скорости более чем в две трети от скорости света. При этом никаких парадоксов не возникает, поскольку для внешнего наблюдателя происходит релятивистское сжатие круга целиком, включая его спицы.

Самым же важным, главным выводом является признание ошибочности самой авторской формулировки парадокса, будто при раскручивании обычного тела радиус колеса одновременно равен исходному и укороченному значению. Ошибка заключена в утверждении от имени теории относительности, что радиус колеса (спица) не испытывает лоренцева сокращения. Но специальная теория относительности *не делает такого предсказания*. Строго согласно её формализму спицы испытывают такое же *эквивалентное* лоренцево сокращение, как и обод колеса.

При этом в зависимости от материала колеса при раскручивании обода до тангенциальной скорости выше 0,7 от световой, оно будет либо разрушено, разорвано, если материал недостаточно эластичен, либо оно целиком испытает лоренцево сжатие до бесконечно малого радиуса с точки зрения внешнего наблюдателя.

Если остановить колесо до его разрушения и до достижения скорости 0,7 от скорости света, то оно примет свою исходную форму без каких-либо повреждений. Абсолютно упругое тело способно сохраниться и при достижении скорости выше 0,7 от скорости света. Таким образом, ни одна из рассмотренных формулировок не позволяет говорить о парадоксе как таковом. Корректное и последовательное применение математики СТО позволяет для каждой рассмотренной ситуации сделать полностью непротиворечивые предсказания.

Специальная теория относительности была сформулирована и строго доказана как *математическая* теорема. Более чем за вековой срок её существования эти доказательства никем не были опровергнуты. Поэтому в рамках её математического формализма никакие математические, *мысленные* эксперименты в принципе не могут ей противоречить. Как правило, внешне корректно сформулированные парадоксы теории на самом деле содержат скрытые нарушения её постулатов. Только при их нарушении в теории возникают противоречия. Например, распространение теории на сверхсветовые сигналы, на тахионы сразу же вынуждает её делать противоречивые, взаимоисключающие предсказания.

Вместе с тем, реальному *физическому* миру специальная теория относительности реальному имеет ограниченное соответствие. Физические эксперименты Маринова, Штыркова и некоторых других исследователей ставят под сомнение соблюдение 2-го постулата теории в реальном мире. Едва ли не единственный формально являющийся подтверждением "парадокса близнецов" эксперимент Хафеле-Китинга поставлен под сомнение по причине того, что результат вполне укладывается в пределы погрешности использованной измерительной аппаратуры [3]. Наконец, в квантовой механике обнаружена сверхсветовая корреляция состояний запутанных частиц, что также позволяет в осуществимом физическом эксперименте обнаружить нарушение 2-го постулата, нарушение преобразований Лоренца для темпа хода часов: относительно движущиеся часы идут синхронно.

Библиографический список:

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля. – 8-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 536 с.

2. Парадокс Эренфеста, Википедия, URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Парадокс_Эренфеста

3. Реквием по теории?, "Спутник ЮТ", научно-популярный дайджест, #1/2002, URL: http://jtdigest.narod.ru/dig1_02/einstain.htm

4. Соколовский Ю.И. Теория относительности в элементарном изложении. – М.: Наука, 1964

5. Физика света. Фильм 2. Свет и пространство. Общая теория относительности, Korean Educational Broadcasting System, 2014, www.ebs.co.kr , URL: https://youtu.be/MGahs3kMTYE

6. Эренфест П. - Относительность. Кванты. Статистика: Сборник статей. – М.: Наука, 1972, с.38

7. Дополнения и анимации к статье, Самиздат, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/erenfest-dop.shtml

Путенихин Петр Васильевич
Putenikhin Peter Vasilievich
Независимый исследователь

УДК 510.22; 514.01; 524.8

ПРАВИЛА СЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ БЕСКОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА

THE RULES OF THE COUNTING OF THE ELEMENTS OF AN INFINITE SETS

Аннотация: Вскрыты ошибки Кантора и его последователей в логических рассуждениях о бесконечных множествах. Приведено доказательство счетности континуума, счетности всех действительных чисел.

Abstract: Cantor's and his followers proofs about infinite sets contain contradictions, logical errors. The proof of the countability of the continuum, the countability of all real numbers, is given.

Ключевые слова: множество, бесконечность, Кантор, равномощность, число, биективное соответствие, противоречие, многомерное пространство

Keywords: set, infinity, Cantor, equipotence, number, bijective correspondence, contradiction, multidimensional space

Счет натуральных чисел в группах

Давно замечено интересное и важное свойство математики, которая позволяет делать верные, но изначально просто как бы выдуманные описания нашего мира, предсказания:

"Существует вопрос, давно волнующий людей, задумывающихся об основаниях математики: *почему математика столь эффективна при описании нашего мира и столь хорошо описывает его эволюцию?* ... Почему эти правила так хорошо работают?" [5]

Однако вряд ли следует слишком уж сильно этому удивляться и вспоминать еще одно её такое же удивительное свойство: способность дать *любой* желаемый результат. Эта математика так хорошо работает просто потому, что мы и вывели её из прямых наблюдений за окружающей действительностью. Эффективно работает, значит, верно подсмотрели. Более того, в науке и, в частности, в физике уже давно замечена еще одна интересная закономерность: кажущиеся поначалу абстрактными математические выражения, уравнения вдруг оказываются описанием какого-нибудь вполне реального явления:

"... физики обнаруживают, что математические построения, необходимые им для описания нового класса явления, уже исследованы математиками по причинам, не имеющим ничего общего с обсуждаемыми явлениями" [2, с.264].

Тем не менее, даже при таком явно полезном подходе следует все-таки быть предельно осторожным при формулировке выводов и следствий из этих математических построений. Можно привести ряд примеров, когда такие выкладки приводят не просто к противоречию со здравым смыслом, но и к довольно заметным противоречиям с логикой, содержат логические ошибки. Например, одним из наиболее известных таких странных выводов при исследовании бесконечных множеств элементов являются доказательства Кантора о равенстве числа точек на квадрате и линии, равной длине его ребра. В предельно строгом виде подобные положения сформулированы на сайте Википедии:

"... множество натуральных чисел ($\mathbb{N}$) равномощно множествам целых чисел ($\mathbb{Z}$), чётных натуральных чисел, всех рациональных чисел ($\mathbb{Q}$), а отрезок числовой прямой ($\mathbb{I}$ = [0,1], континуум) оказывается в биективном соответствии со всей числовой прямой ($\mathbb{R}$), а также с *n*-мерным евклидовым пространством ($\mathbb{R}^n$)" [1].

Несомненно, это противоречит нашей интуиции. Здравый смысл и очевидность говорят нам, что этого не может быть. Ведь четные числа явно составляют лишь половину всех целых чисел. Это справедливо для любой конечной совокупности чисел, но, как утверждается в цитате, не соответствует бесконечным рядам, для которых получается, что их количества равны. А утверждение в отношении отрезка буквально означает, что всем точкам *любого* конечного отрезка соответствуют все точки всей бесконечной евклидовой плоскости. Такие же странные выводы о соотношении целого и части делаются и в космологии [6, с.77; 2, с.282]. Эти противоречащие здравому смыслу и логике выводы преподносятся в научно-популярной литературе, в книгах, в

документальных фильмах (BBC) как строго доказанные факты. Ошибочность подобных методов можно показать, если произвести подсчеты количеств натуральных чисел при различных способах их группирования, приводящие к любому произвольному результату.

Нумерация четных чисел. Например, в одном из вариантов для доказательства равномощности чисел натурального ряда и четных чисел предлагается записать четные числа в виде бесконечного ряда, а под этим рядом написать их порядковые номера из натурального ряда чисел [6, с.78]:

2, 4, 6, 8, ... (1)

1, 2, 3, 4, ...

Здесь каждому четному числу соответствует один порядковый номер из натурального ряда чисел и наоборот. Значит, утверждается, количество четных чисел равно количеству всех чисел натурального ряда. Но это неверно. В частности, в приведенном примере четные числа не являются *частью* ряда натуральных чисел, это совершенно *самостоятельный* ряд, в котором вместо четных чисел могли быть любые символы. Ошибка состоит в некорректном способе подсчета, в котором часть элементов исходного ряда просто игнорируется, исключается из процедуры подсчета. Произведём подсчет другим, правильным способом. Возьмем ряд всех натуральных чисел и будем их подсчитывать самым обычным, привычным способом. Для этого каждое натуральное число будем класть в соответствующий ящик, и при этом называть его значение: один, два, три и так далее. Одновременно, по мере того, как нам будут встречаться эти числа, мы будем с каждым четным числом класть такую же цифру во второй ящик. И, для наглядности, с каждым нечётным – в третий ящик. Ну, и для ещё большей наглядности – для каждого пятого числа – в четвертый ящик.

Через некоторое время посмотрим, что у нас в ящиках? Через тысячу шагов, очевидно, в первом ящике будет 1 000 чисел. Во втором и третьем – по 500, а в четвертом – только 200. Ну, или в виде соотношения 10:5:5:2.

Продолжим раскладывать числа и вновь проверим содержимое ящиков теперь уже через 10 000 шагов. И в этот раз мы обнаружим, что количества чисел в ящиках соотносятся как 10:5:5:2. Нужно ли доказывать, что и через миллион, и через миллиард, и через гугл шагов количества чисел в ящиках будут соотноситься как 10:5:5:2?

Если мы последовательно синхронно подсчитаем количества чисел в натуральном ряду, то мы найдём истинное соотношение их количеств. Однако говорить, что бесконечное *количество* всех натуральных чисел больше, чем *количество* всех четных или нечетных чисел не совсем правильно. Эти числа образуют бесконечности и более правильно говорить об их *мощности*:

бесконечность всех натуральных чисел в два раза мощнее бесконечности всех четных или нечетных чисел и в пять раз мощнее бесконечности всех чисел, кратных пяти.

Кстати, также неправильно говорить в отношении бесконечностей, что часть может *равняться* целому. Правильнее говорить, что мощность *части* бесконечности является *частью* мощности *всей* бесконечности.

Перестановки в рядах. Еще один вариант ошибочного доказательства равномощности части и целого приведен в книге [2, с.282], где предлагается вести подсчет нечетных чисел, предварительно переставив их в ряду:

"В бесконечной вселенной коэффициент объема можно определить как долю, занятую областями данного типа. Но это определение приводит к неоднозначности. Чтобы проиллюстрировать природу проблемы, зададимся вопросом: какова доля нечетных чисел среди целых?

Четные и нечетные числа чередуются в последовательности 1, 2, 3, 4, 5, и можно подумать, что ответом, очевидно, будет половина. Однако целые числа можно упорядочить другим способом. Например, так: 1, 2, 4, 3, 6, 8 ... Эта последовательность по-прежнему включает все целые числа, но теперь за каждым нечетным числом следует два четных, и кажется, что только треть целых чисел являются нечетными".

Здесь мы *обязаны* отчетливо увидеть некорректность и противоречивость такой модификации числового ряда, которая строго последовательно и логично может быть легко доведена до абсурда. Для этого все нечетные числа поместим в самый конец бесконечной последовательности. Теперь при поверхностном анализе последовательности мы обнаружим, что в ней нечетных чисел нет вообще. Конечно, мы догадываемся, что все они где-то дальше, но, как бы долго мы ни просматривали последовательность, мы никогда не встретим в ней ни одного нечетного числа. Однако итог явно

абсурден: нечетные числа точно есть, но мы их почему-то не пересчитываем. Просто причина заключается в выборе некорректного метода подсчета: игнорирование длины ряда. Мы же сами каким-то образом перенесли нечетные числа в конец ряда? Ну, так и нумеровать тогда следует весь ряд. Это же относится и к предложенному выше методу упорядочивания. Каким-то образом эти числа перетасованы? Вплоть до последнего. Ну, так и считать следует соответственно – до последнего числа. Если же числа перетасовываются *в процессе* счета, тогда "временно вынутые из ряда нечетные числа" все время будут где-то скапливаться. Трудно будет не заметить это бесконечно большое хранилище нечетных чисел, где бы оно ни находилось.

С другой стороны, мы можем проделать то же самое и с четными числами, получив в результате, что их в общем ряду только треть. Иначе говоря, один и тот же метод показывает, что среди целых чисел нечетных одновременно только треть и только две трети. Понятно, что методика, дающая два взаимоисключающих результата не вызывает доверия.

Группировка степеней. Такие методики пересчета, отождествления всегда содержат плохо скрытую подмену понятий. Например, с рядом натуральных чисел отождествляется ряд степеней 10^1, 10^2, 10^3 ... 10^n... и так далее. Таким же образом устанавливается взаимно однозначное соответствие и между множеством натуральных чисел и множеством всех квадратов натуральных чисел 1^2, 2^2, 3^2, … n^2… и так далее.

Известно, что не каждое натуральное число является квадратом другого натурального числа. Из этого строго логично следует, что ряд квадратов содержит *меньше* членов, чем ряд натуральных чисел, являющихся их основаниями. Тем не менее, пересчет их по правилу (1) как бы уравнивает их количества, количественно отождествляет. Однако принять такое отождествление нет никаких оснований. Нужно просто обратить внимание на то, что же именно отождествляется. В обоих приведенных примерах сразу же можно заметить присутствие члена натурального ряда. Понятно, что отождествляются не *значения* членов ряда, а их порядковые номера, которые самым наглядным образом обозначены в каждом из членов рядов. До начала отождествления каждый член ряда уже имеет свой порядковый натуральный номер, а значение самого члена ряда не имеет никакого смысла. Это могут быть и летучие обезьяны с соответствующей биркой на шее, и протоны в бесконечной Вселенной, которые ещё только предстоит пометить соответствующим номером, и даже множество миров Эверетта.

Группировка в пары. Попробуем теперь просто пересчитать, перенумеровать все натуральные числа, предварительно соединив их в пары четное-нечетное число: (1,2), (3,4), (5,6), то есть, присваивая каждой паре последовательно номера 1, 2, 3, 4 и так далее. Очевидно, что каждой паре будет присвоен один номер, натуральное число. И мы получаем явное противоречие, поскольку это означает, что количество всех натуральных чисел, собранных в пары, в два раза больше количества всех натуральных чисел. Буквально, количество всех натуральных чисел в два раза больше количества всех натуральных чисел. Но натуральные числа можно группировать и тройками, пятерками, десятками и так далее.

Десять рядов. Еще более наглядно подмена понятий будет видна, если составить из натурального ряда десять новых рядов, каждый из которых содержит натуральные числа, оканчивающиеся на 0, 1, 2 и так далее до 9. Если теперь пересчитать их количества, то для каждого ряда, как и в случае (1) мы получим количество, совпадающее с количеством натуральных чисел. Теперь вновь соединим все эти ряды в единый. Очевидно, что в результате мы получим исходный ряд – натуральные числа. Получается, что количество членов просуммированного ряда в десять раз больше, чем в ряду натуральных чисел. Но ведь просуммированный ряд – это тот же самый натуральный ряд. Здесь совершается та же ошибка: подсчет без учета принадлежности чисел выделенных рядов *исходному*, родительскому натуральному ряду.

Квадратная таблица. Однако и это не предел. Можно, например, составить таблицу из n строк натуральных чисел, поэтому, соответственно, столбцов будет тоже n, где n – натуральное число. Теперь подсчитаем, перенумеруем диагональным процессом Кантора все числа этой таблицы. Очевидно, что каждое из чисел получит свой порядковый номер, которых, понятно, будет ровно n, которое затем устремим к бесконечности и пронумеруем все члены таблицы диагональным процессом Кантора. Таблица определенно содержит n^2 элементов. Получается, что количество n^2 элементов равно n, или, другими словами, количество всех натуральных чисел равно квадрату количества всех натуральных чисел. Конечно, сами натуральные числа к этому непричастны. Проблему создаёт выбор специфического, некорректного способа подсчета, в основе которых явно

лежат методы Кантора, позволяющие получить любой, *произвольный* результат. Поскольку один и тот же метод при его строго *корректном* применении даёт разные результаты, такой метод не может быть верным.

Отрезок и квадрат не равномощны

Пожалуй, одним из наиболее известных результатов исследований Кантора является доказательство равномощности точек отрезка и квадрата, то есть, равной мощности (количества) точек в прямом отрезке и квадрата со стороной, равной этому отрезку. Но в своём доказательстве Кантор использует противоречивый, нелогичный метод. На самом деле мощность множества (количества) точек квадрата на отрезке имеет более высокий порядок, чем мощность множества точек отрезка. То есть, больше в бесконечное число раз.

Есть наглядный и предельно простой способ показать это: нужно отрезок просто наложить на квадрат. Под отрезком окажутся все тождественные ему точки квадрата. Остальные точки квадрата образуют отдельное бесконечное множество точек, очевидно, большей мощности. Если же отрезок длиннее стороны квадрата, то, казалось бы, можно найти такой квадрат, который будет содержать меньше точек, чем эта линия:

"Разумеется, можно разломать прямую линию на отрезки, длина которых равна стороне квадрата, и после этого каждый отрезок поместить в квадрат так, чтобы они не пересекались друг с другом" [3, с.59].

Это верно, но ломать линию совсем не обязательно. В доказательстве Кантора длина линии всегда равна стороне квадрата. Однако, может быть, разлом линии в цитате предложен для того, чтобы завуалировать, спрятать фактическое опровержение этого доказательства? Действительно, если наложить отрезок на квадрат, то их точки будут отождествлены, причем, вопреки Кантору, у квадрата точек окажется несопоставимо больше, чем у линии. Как бы то ни было, в цитате отчетливо просматривается мысль, что линия содержит меньше точек, чем квадрат. По аналогии с таким разбиением возникло и обратное предположение:

"Но вдруг и квадрат можно как-то разбить на части, а потом эти части положить на прямую, чтобы они не задевали друг друга?" [3, с.59].

Алгебраически с учетом равной метрики, в принципе, это возможно: вытянуть квадрат в линию. Но и такой способ совмещения, алгебраический сразу же высвечивает противоречивость решения Кантора. К сожалению, автор цитаты не стал развивать эту идею дальше.

Для сравнения двух множеств точек следует попытаться установить однозначное соответствие между этими точками, то есть, показать, что точки обоих этих множеств можно объединить, скажем, в такие пары (A, B), что каждый элемент, каждая точка A принадлежит линии, а каждый элемент, точка B – квадрату, причем каждый из элементов A и B попал только в одну пару [3, с.59].

Согласно Кантору два бесконечных множества точек – линия и квадрат – имеют одинаковое количество элементов, если между этими элементами можно установить указанное однозначное соответствие. В математике обычно говорят о мощности множества, условно подразумевая под нею количество его элементов. Следовательно, отрезок и квадрат, построенный на нем, по Кантору имеют одинаковую мощность. Метод, который он использует для этого доказательства, состоит в следующем. В системе координат x0y простроен квадрат ABCD, причем его вершина A совпадает с началом координат, а вершина B лежит на оси x. Отмечается, что не всякий способ позволяет установить взаимное однозначное соответствие между точками квадрата и отрезка:

"Проектирование точек квадрата на отрезок AB здесь не помогает, ведь при проектировании в одну точку отрезка перейдет бесконечное множество точек квадрата (например, в точку A – все точки отрезка DA)" [3, с.77].

Однако такое обоснование нас, разумеется, устроить не может, поскольку это решение верное, фактически является доказательством неравенства множеств. Тем не менее, оно все-таки отбрасывается под весьма надуманным предлогом. Взамен приводится ошибочный, хотя, следует признать, довольно изящный механизм отождествления. Координаты каждой точки квадрата можно представить в мнемоническом виде:

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

$$y = 0,\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

В этих записях каждый символ α, β представляет собой какую-либо цифру из 0...9. То есть, *x* и *y* – это просто два дробных числа, меньшие единицы. Здесь следует, кстати, выразить недоумение по поводу отождествления чисел вида 0.50000... и 0.499999....

"...например, 0,500000... и 0,49999999...— это одно и то же число. Для определенности будем пользоваться записью с нулями" [3, с.73].

В частности, вопрос: отождествляются только такие числа? А, например, числа 0.550000... и 0.549999... не отождествляются по такому же принципу? Это правило, собственно говоря, не выдумка. Например, его использует офисная программа MS Excel, правда, с противоположной "определенностью". Там любое целое число в одном из представлений так и записывается: с множеством девяток в конце. Но в нашем случае мы рассматриваем числа в их *абсолютном* смысле. Поэтому число 0.5000...1 и число 0.5, число 0.4999...9999... или даже 0.4999...9998... – это *разные* числа. Если же вводить указанное правило (округление), то следовало бы и здесь дать веские обоснования, почему такой участи избежали, например, числа 0.549999... или 0.22229999..... Чем они кардинально отличаются? Если же правило распространить и на них, то сразу же образуется счетная бесконечность чисел, отброшенных в результате безосновательного округления.

Итак, после тривиального преобразования координат точки квадрата в мнемоническую запись, с ними производится столь же изящная манипуляция, которая, тем не менее, не имеет веско аргументированного, рационального смысла. Перетасовыванием знаков двух чисел формируется новое число:

$$z = 0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3...\alpha_n\beta_n...$$

Обратим внимание на следующее интересное замечание и на приведенный далее способ отождествления:

"... для простоты мы не берем точки квадрата, лежащие на его сторонах, а берем лишь внутренние точки ... Нам надо теперь найти точку Q отрезка AB, соответствующего точке T" [3, с.78].

Точка T – это точка в квадрате с указанными координатами *x* и *y*. Координата точки отрезка выбирается по принципу Q = *z*. Далее делается ожидаемый вывод: точке T квадрата поставлена в соответствие точка Q отрезка [0, 1]. Следовательно, различным точкам квадрата соответствуют разные точки отрезка и тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и точками отрезка. Из этого сразу же делается вывод, что множество точек квадрата имеет такую же мощность (количество), что и множество точек отрезка (их количество).

Такие выводы противоречат не только здравому смыслу, но и логике, поскольку налицо подмена понятий. Сначала обратим внимание на то, что же отождествляется. А отождествляется *координата* точки отрезка и некоторое *комбинационное* число, которое вообще-то координатой не является. Действительно, координатой чего мы можем признать сборку – число *z*? Какое отношение эта комбинация знаков имеет к координатам *x, y* точки квадрата? Координаты – это *два* числа (так сказать, две штуки), а *z* – это *одно* число (одна штука). По существу, число *z* является для координат *x, y* своеобразным *индексом*. Иными словами, мы здесь отождествили не две точки, а точку и некий индекс. Но индекс чего? Квадрат – это плоская фигура, следовательно, каждая его часть изначально должна рассматриваться как такая же плоская фигура, фигура с площадью. И мы фактически отождествили не две точки, а точку и площадку, бесконечно малый квадрат. Размеры точек на линии и точек, площадок на квадрате разные, хотя и те и те бесконечно малы.

Конечно, для отождествления это не является противоречием. Мы можем, например, отождествить 10 яблок и 10 уток. Или 200 кресел в кинотеатре и 200 зрителей. Но при этом следует помнить, что равны не они сами по себе, а их количества. В доказательстве Кантора, вроде бы, так и говорится, что равны мощности, равны количества. Однако преподносится это так, что создается впечатление, будто эти сравниваемые множества равны не только по своим количествам, мощности, но и равны буквально – точка на линии тождественно равна точке на квадрате. При таком подходе можно отождествить *любые* бесконечности, просто отбросив их качество и оставив лишь безликое количество. Все зависит только от искусства отождествителя. Приведем простой пример.

Точки любой линии на плоскости характеризуются двумя координатами. Точно так же и в рассмотренном примере все точки линии имеют две координаты, одна из которых просто равна нулю. Теперь становится понятно, для чего мы обратили внимание на замечание "*для простоты мы не берем*". На самом деле в таком упрощении преследовалась цель упростить организацию *подмены понятий*. Ведь если у линии признать наличие *имеющейся на самом деле* второй координаты, то и

для неё пришлось бы также формировать комбинированное число – индекс. Действительно, если вернуть в рассмотрение и стороны квадрата, то одна из них совпадет с отождествляемой линией. В этом случае надо было бы *веско обосновать*, почему координаты нижней стороны квадрата преобразуются в число *z*, а линия, полностью *совпадающая* с этой стороной, по-прежнему описывается одной координатой, хотя у неё однозначно имеется и вторая? Ясно, что разумные обоснования этого просто *невозможны*. Если же вернуть линии её законные права на вторую координату, то все её собственные числа *z* будут начинаться с нулевого знака. То есть, с линией можно будет отождествить только одну *единственную* линию квадрата – его нижнюю сторону, предусмотрительно отброшенную. Соответственно, мощность множества точек линии окажется меньше мощности точек квадрата в счетное число раз, то есть, в бесконечное. Мощность множества точек квадрата имеет более высокий порядок. Просто результат зависит от способа подсчета и может быть выбран на любой вкус. Два способа мы уже увидели. Вот еще несколько.

Рассмотрим эти два объекта в единой метрической системе единиц, в которой размер точки квадрата равен размеру точки линии. Это естественное разумное предложение: бессмысленно приравнивать, скажем, два *куска* золота, размеры которых неизвестны. Длина стороны квадрата равна *a*, следовательно, метрически он содержит a^2 точек. Отрезок по этой же причине содержит *a* метрических точек. Другим словами, квадрат и линия метрически тождественны. Тогда линия длиной *a*n будет содержать заведомо больше точек, чем квадрат, если $n > a$.

Такой же результат можно получить и иначе. Возьмем тот же квадрат и разделим его на 4 части. Нижний ряд, два вновь образовавшихся квадрата назовём *условно* линией. Пока эти два нижних новых квадрата, понятно, на линию не похожи.

Теперь разделим эти 4 квадрата ещё на 4 части каждый. Нижний ряд из 4 квадратов по-прежнему будем считать линией. Затем вновь каждый квадрат разделим крестом на 4 части. Теперь уже нижний ряд из 8 мелких квадратов отдаленно напоминает некую линию. Посчитаем, отношение количества этих квадратиков в исходном квадрате к их количеству на прообразе линии. По пройденным шагам деления эти отношения равны: 2, 4, 8. Легко обнаружить, что эти отношения будут возрастать по мере дальнейшего деления квадратов по уравнению $2^n \times 2^n$. Каждый из сомножителей означает, соответственно, деление по вертикали и по горизонтали. Продолжим такое же деление до бесконечности: $n \to \infty$.

Очевидно, что все квадратики станут бесконечно малыми, превратятся в точки и исчезнут из видимости. При этом и линия станет тем, чем мы её обычно и представляем – линией с нулевой толщиной. Что важно, в этом случае и квадрат и линия состоят из *одинаковых* точек. И количества этих точек будут для квадрата – $2^n \times 2^n$, для линии – 2^n. Отношение количеств или мощностей точек квадрата к точкам линии будет равно 2^n. При увеличении числа шагов деления до бесконечности отношение также увеличится до бесконечности. Это значит, что мощность множества точек квадрата имеет более высокий порядок, чем мощность множества точек отрезка. Конечно, этот способ относится более к алгебре, чем к геометрии, поэтому в нём подмены с отождествлением скрыть труднее.

Наконец, можно рассмотреть и классический способ подсчета. Для этого возьмем одну из горизонтальных линий квадрата и начнем пересчитывать на ней точки: 1, 2, 3 и так далее. Поскольку координаты точек на отождествляемой линии совпадают с одноименными координатами линии квадрата, то будет пересчитывать одновременно и их: 1, 2, 3 и так далее. Это самый правильный способ пересчета и отождествления. Очевидно, что мы получим два тождественных счетных множества, однозначно отождествив все точки линии со всеми точками на одной из линий квадрата. Остальные линии квадрата, с другими координатами, разумеется, останутся без номеров. Вряд ли этому следует удивляться: физически и геометрически две линии тождественны. Следует отметить, что здесь мы пересчитываем не координаты, которые обозначаются действительными числами, необоснованно признанными несчетным множеством.

Таким образом, после завершения счета мы обнаруживаем, что одна единственная линия квадрата и отождествляемая с ним линия имеют равные мощности или количества точек. Но на квадрате таких линий – счетное множество (помним и отвергаем утверждение о несчетности множества действительных чисел). Следовательно, общее число точек на квадрате в счетное множество раз превышает число точек на любом его отрезке и отождествляемой линии.

Однако все рассмотренные отождествления, зависимые от способа счета, построены таким образом, что подсчет числа точек всегда приводит к результату либо большей, либо равной

мощности множества точек квадрата по сравнению с множеством точек отрезка. Но можно подобрать и такое правило счета, что соотношение изменится на обратное: окажется, что число точек в отрезках является более мощным множеством. Для этого возьмем не один, а несколько одинаковых квадратов, просто выбрав в кубе несколько разных сечений, и одну линию с длиной ребра куба. Попробуем отожествить все точки этих квадратов с точками на линии. Вновь воспользуемся методикой нумерации точек, предложенной Кантором. Для того чтобы точки на квадратах можно было различить и из очевидных соображений мы *обязаны* признать, что квадраты имеют ещё одну координату. То есть, каждая точка квадрата в кубе в этом случае характеризуется тремя координатами:

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

$$y = 0,\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

$$s = 0,\gamma_1\gamma_2...\gamma_n...$$

Для простоты, что, вообще-то, усложняет наше опровержение, ослабляет его, возьмём значения этих координат в кратчайшем виде, в виде единственной цифры от 0 до 9 без последующих дополнительных нулей, что во много раз увеличит число таких комбинированных точек, принадлежащих каждому квадрату. Для определенности возьмем в кубе 10 сечений, причем имеющие точное значение координаты $s = 0$; 0,1; 0,2 ... 0,9. Теперь создадим по методу Кантора новые числа для точек каждого квадрата. Согласно этому методу каждая точка квадрата будет описываться новыми числами:

$$x = 0,\gamma_1\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

$$y = 0,\gamma_1\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

и полученными из них индексами:

$$z = 0,\gamma_1\alpha_1\beta_1 0\alpha_2\beta_2...0\alpha_n\beta_n...$$

Здесь символом γ обозначен номер квадрата или, что то же самое, его координата. Например, точки квадрата с номером $s = 0{,}5$ будут описываться индексом:

$$z = 0{,}5\alpha_1\beta_1 0\alpha_2\beta_2...0\alpha_n\beta_n...$$

Как видим, закономерно и оправданно все точки и, соответственно, скомбинированные числа отличаются друг от друга, а все точки этого квадрата расположатся на интервале 0,5...0,6 отождествляемой линии и, более того, на линии останется бесконечное число точек, которым не будет соответствовать ни одна точка этого квадрата. Это точки, для которых индекс должен был бы содержать вместо нулей в позициях, кратных трём, другие цифры. Ничего не изменится, если цифру координаты s ставить в тройках последней.

Такая же ситуация будет наблюдаться с индексами и других девяти квадратов. Легко обнаружить, что комбинированные числа каждого квадрата изменяются в диапазонах, соответственно, [0, 0.1), [0.1, 0.2), [0.2, 0.3) и так далее. Таким образом, мы разместили все точки десяти квадратов на одной линии [0, 1], причем на линии осталось бесконечное число незанятых точек. Получается, что мощность множества, количество точек квадрата имеет меньший порядок, чем мощность множества точек любой линии. В нашем случае – более чем в десять раз. Но мы могли использовать и другое количество квадратов. Тогда и их точки оказались бы во взаимном однозначном соответствии с точками *части* отрезка. В этом случае соотношение мощностей станет еще больше и даже, по желанию, в любое число раз.

Итак, даже при ослаблении нашей аргументации мы приходим к выводу, который противоречит выводу Кантора об их равенстве. Два способа нумерации, основанных тождественно на одном и том же методе, приводят к несовместимым, противоположным выводам. Поэтому этот метод Кантора логически неверен, ошибочен. И вновь возникает риторический вопрос, какой же в этом случае метод верный? Методов группировки может быть сколько угодно, поэтому верным является только один метод – без группировки, то есть, сравнивать можно только равнозначные объекты – линию с линией. В этом случае вывод однозначный – множества точек линии и квадрата не равномощны. Самым простым и наглядным способом определения этого является простое наложение линии на квадрат и отождествление соприкоснувшихся точек.

Практически такая же противоречивая ситуация возникает и при отождествлении двух противоположных сторон квадрата: верхней и нижней, либо любых двух средних линий квадрата. Возникает совершенно противоестественная ситуации: эти пары линий вообще нельзя отождествить,

поскольку нумерация их точек не имеет одинаковых значений. Верхняя сторона квадрата должна иметь по Кантору значения, начинающиеся с 9, нижняя – с 0, а средние, например, с 3 или 5.

Очевидно, что такой принцип "сколько будет? а сколько надо?", к которому, по сути, сводятся методы Кантора, не может служить основой для корректного математического приема. Но в чем же состоит хитрость, изюминка, так сказать, канторовского метода отождествления? По какой загадочной причине происходит такое противоестественное отождествление? В чем его тайный механизм? Ведь мы же четко видим, что каждой точке квадрата можно однозначно привязать каждую точку линии, причем ни одна из точек не останется без своей единственной пары. А тайна, в сущности, предельно проста. Покажем это на еще одном несколько отвлеченном, но подобном примере.

Возьмем для лучшей визуализации квадрат с бесконечным числом точек в количестве... 1000×1000. Конечно, это на самом деле не бесконечность, но число все-таки очень большое – миллион точек, пересчитать которые вручную будет весьма непросто. Выберем на этом квадрате одну линию, нижнюю грань квадрата. Согласно методу Кантора присвоим какой-то точке квадрата индекс:

$$x = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n... \qquad = 008$$

$$y = \beta_1\beta_2...\beta_n... \qquad = 010$$

$$z = \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3...\alpha_n\beta_n... \quad = 00.01.80 = 000180$$

Здесь индекс z сначала представлен с разделительными точками, чтобы было видно, как он образован. Итак, мы получили число z, которое, видимо, точно имеется на отрезке [0, 999]. Правда, настораживает число нулей в этом индексе. Поэтому возьмем для уточнения другую точку на квадрате:

$$x = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n... \qquad = 018$$

$$y = \beta_1\beta_2...\beta_n... \qquad = 025$$

$$z = \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3...\alpha_n\beta_n... \quad = 00.18.25 = 001825$$

Что-то у нас, как видим, пошло не так. Сразу же можно сделать вывод: на линии [0, 999] такой точки *точно* нет. В чем же дело? Мы в точности следовали методу Кантора, просто использовав отрезок не [0, 1], а более длинный [0, 999]. Принцип тот же, а размеры фигур явно не должны влиять на результат. Иначе получается противоречие: квадрат и линия размером [0, 1] тождественны по мощности, а квадрат и линия [0, 999] имеют уже разные мощности.

Однако именно в этом и состоит хитрость, а по сути подмена понятий в методе Кантора. В нашем случае мы можем попытаться решить проблему такой же дополнительной хитростью. Просто добавим в нашем индексе... запятую. В этом случае подозрительно большое количество нулей сразу превращается в нужное количество:

$$z_1 = 00.01.80 = 000{,}180$$

$$z_2 = 00.18.25 = 001{,}825$$

Вот теперь-то каждая из этих точек уже обязана найти своё соответствие на линии. Но возникает другое противоречие. Координаты всех точек квадрата и линии – целые натуральные числа. А здесь мы получили числа дробные, поэтому отождествлять эти индексы с точками линии мы не имеем права. Зато мы обнаруживаем ту самую загадку метода Кантора для отрезка [1, 0]. Фактически индекс формируется методом, схожим с умножением двух чисел. В нашем случае это соответствие должно выглядеть примерно так:

$$z_1 = x_1 \times y_1 = 008 \times 010 = 000800$$

$$\textit{вместо}\ z_1 = 000180$$

и для второго примера:

$$z_2 = x_2 \times y_2 = 018 \times 025 = 000450$$

$$\textit{вместо}\ z_2 = 001825$$

Для сравнения приведем и третий пример:

$$z_3 = x_3 \times y_3 = 555 \times 777 = 431235$$

$$\textit{вместо}\ z_3 = 575757$$

Как видим, оба метода – умножение и перетасовка цифр – дают числа одного и того же порядка с разрядностью площади квадрата (миллион). При этом можно догадаться, что количество *разных* произведений координат ровно в два раза меньше, чем количество пар сомножителей, поскольку они могут меняться местами. Действительно, пар сомножителей ровно миллион, следовательно, и произведений тоже ровно миллион. Поскольку существуют симметричные пары сомножителей, то их произведения равны. Следовательно, количество *уникальных* произведений равно полумиллиону. Мы полагаем, что произведения разных чисел дают разные результаты.

При перетасовках цифр смешиваемых пар также ровно миллион, следовательно, и результирующих чисел с перетасованными цифрами также будет миллион. Но в этом случае, что довольно странно, среди них не будет одинаковых. Иначе говоря, при умножении пар какие-то значения в ряду из миллиона чисел будут отсутствовать. Это легко обнаружить: при перетасовке пар может быть получено число 999 999, но при умножении пар такое число получено быть не может – максимальное значение произведения равно 998 001. И таких "отсутствующих" произведений пар – ровно полмиллиона.

Метод Кантора, несомненно, выгоден тем, что каждая точка получит свой индивидуальный, уникальный индекс. Однако таких индексов будет заведомо больше, чем элементов в строке, следовательно, и в отождествляемой линии. Искусственно введенная запятая сжимает эти числа до интервала отрезка [0, 999], но множество из них сразу же становятся дробными, то есть, объективно не могут этому отрезку принадлежать. Увеличение до бесконечности дискретности квадрата и линии сохранит эту тенденцию.

А что же с исходным методом Кантора для отрезка [0, 1]? Там, как видим, произведена точно такая же замена умножения двух чисел на перетасовку их цифр, позволившая получить нужное количество индексов. Порядок чисел при умножении и перетасовке по-прежнему один и тот же. Однако индексы или произведения координат имеют больший *порядок* дискретности, чем каждая из координат, в том числе, и точки отождествляемой линии. И здесь происходит всё та же подмена понятий при подсчете числа элементов в ряду, что и при подсчете числа четных чисел в натуральном ряду. Только здесь каждой точке линии соответствует бесконечное число индексов точек квадрата. И вот почему.

Понятно, что в числах с бесконечным числом знаков разглядеть это весьма непросто, тем более что все они выглядят одинаково, поскольку одинаково начинаются – с нуля и запятой после него. Сравнивая числа – координату линии (q) и координатный индекс z(x, y), например, для q=x=y=0,1 (точное значение), мы находим z=0,11. Дискретность z в этом случае в 10 раз выше, чем дискретность q. То есть, между двумя дискретными значениями q=0,1…0,2 поместится десять подобных индексов. Если q=x=y=0,12345, то z=0,1122334455 и дискретность z уже в 100 000 раз больше дискретности q. Следовательно, между точками q=0,11223…0,11224 (это точные значения) поместится 100 000 индексов с дискретностью z. Другими словами, беря две координаты с некоторой дискретностью (числом знаков после запятой), мы получаем индекс с удвоенной дискретностью и степенным увеличением их количества. Сравнивая координаты линии и индексы, мы сравниваем фактически не их значения, которые предельно скрыты от нас из-за их бесконечной длины, а их порядковые номера, которые для счетных множеств, разумеется, всегда найдут соответствие.

Описать этот процесс однозначно и максимально развернуто крайне сложно. Поэтому ещё раз обратимся к примеру. Пусть отрезок [0, 1] состоит из миллиарда (10^9) точек, а соответствующий ему квадрат, следовательно, содержит 10^{18} точек. Эти числа являются так же и количествами их порядковых номеров, эквивалентами мощностей этих множеств. Сразу же обнаруживаем, что на линии точек меньше, чем в квадрате. Если постоянно удваивать количество точек вплоть до бесконечности, это отношение будет только возрастать.

Если для отождествления мы возьмём произвольную точку указанного квадрата, то её координатный индекс будет содержать 10^{18} знаков после запятой. И мы не имеем никакого права отождествлять этот индекс с точкой на линии, поскольку на ней допустимы только числа с 10^9 знаков после запятой, таких "мелких" точек на линии просто нет. При увеличении дискретности квадрата и линии это расхождение будет расти по квадратичному закону.

Кстати, здесь мы наглядно обнаруживаем абсурдность сравнивания количества чисел натурального ряда и его части. Мы можем диагональным процессом Кантора перенумеровать точки линии и квадрата, даже не формируя для них индексы, и получим при этом равенство их количества. Однако мы только что увидели, что такое равенство противоречиво, а попросту его нет.

Следовательно, и сравнивание количества членов множеств путем их пересчитывания – это в общем случае опасный метод, позволяющий получить *любой* желаемый результат, и которым следует пользоваться предельно продуманно, осторожно. Действительно, мы можем сравнивать точки линии и квадрата таким же простым пересчетом, получив в обоих случаях бесконечность. Но это *разные* бесконечности, бесконечности разной мощности.

Счетность точек на отрезке

В связи с хитростями нумерации нередко вспоминают еще одно доказательство Кантора – о невозможности никаким способом сосчитать число точек на отрезке прямой. Утверждается, что их нельзя перенумеровать с помощью бесконечного ряда натуральных чисел, приписывая каждой точке свой номер, в каком бы порядке мы ни выбирали эти точки. Всегда останется хотя бы одна точка, на которую не хватит номера.

Перенумеровать или, тождественно, пересчитать бесконечное количество чего-либо, в том числе, сосчитать точки отрезка, действительно, невозможно физически. Однако приводимое затем доказательство, как правило, начинается со слов: «Представим, что вопреки нашему утверждению кому-то удалось перенумеровать точки этого отрезка», после чего приводятся хитрые комбинации с нумерацией. Но здесь следует напомнить фундаментальный принцип классической логики и классической математики, который постулирует полное отрицание актуальной бесконечности: «Infinitum Actu Non Datur» (Аристотель) – «актуальная бесконечность не существует». Принцип утверждает потенциальный, т.е. принципиально незавершаемый характер бесконечности множества. Актуальная, то есть, *пересчитанная* бесконечность лишена смысла. Действительной бесконечностью может считаться лишь потенциальная бесконечность, завершить счет членов которой невозможно. Поэтому приводимое доказательство на этих словах можно и прервать – оно некорректно с самого начала. Впрочем, в этом вопросе особое мнение, которое тоже следует признать некорректным, приписывается Давиду Гильберту. По мнению немецкого математика, одного из величайших умов своего времени, главное различие между актуальной и потенциальной бесконечностью заключается в следующем. Потенциально бесконечное есть всегда нечто возрастающее и имеющее пределом бесконечность, тогда как актуальная бесконечность – это завершённое целое, в действительности содержащее бесконечное число предметов [4]. Вероятно, в качестве примера можно привести ряд из обратных степеней двойки. Число членов этого ряда равно бесконечности, но каждый его член не возрастает, а, наоборот, стремится к нулю. Тем не менее, целым можно признать сумму ряда, которая в точности равна 2. Здесь присутствует бесконечный предел, но который не равен бесконечности, а, напротив, является завершенным целым – 2, поэтому такой ряд, казалось бы, должен быть одновременно и потенциальной и актуальной бесконечностью. Но сравнение суммы ряда с количеством его членов явно лишено смысла.

Счетность всех действительных чисел

Вместе с тем, невозможность подсчета точек на отрезке в любой последовательности рассматривается в более широком смысле. Отрезок идейно отождествляется с числовым континуумом, в частности, отрезок $[1, 0]$ получает смысл континуума, количества всех действительных чисел, не превышающих единицу. И в этом смысле с опорой на методологию счета Кантора утверждается, что множество всех действительных чисел несчетно, то есть, невозможно их пересчитать, присвоив каждому из них некоторое натуральное число – номер, поскольку всегда останутся непронумерованные числа [3, с.73–74]. Вообще-то, на первый взгляд, интуитивно это выглядит вполне разумно. Рассмотрим, например, следующую явно бесконечную последовательность действительных чисел:

0,12345... (2)
1,23456...
12,3456...
123,456...

В этих числах запятая просто занимает позицию n, представляющую натуральное число, поэтому количество чисел в указанной последовательности в точности равно числу строк, n, где n равно бесконечности. Поскольку все номера натуральных чисел использованы для нумерации этих действительных чисел, то очевидно, что остальное множество действительных чисел осталось без номеров, то есть их множество – несчетно.

Еще один интересный вариант подсчета количества точек на отрезке можно встретить в популярной литературе. Нетрудно догадаться, что и в этом примере использованная методика счета

ошибочна и ведет к ошибочному выводу. Несложное доказательство содержит не очень сильно скрытую, хотя никем и не замеченную подмену понятий. Итак:

"... несложно доказать, что множество всех точек на прямой линии несчетно. Вместо этого множества можно говорить о множестве всех действительных чисел, так как каждой точке прямой соответствует действительное число и обратно. Каждое действительное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби вида $\alpha,\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n...$" [3, с.73].

Как видим, ряд знаков имеет бесконечное счетное количество цифр, и резонно предположить, что так же считает и автор доказательства.

"Предположим, что нам удалось каким-то образом перенумеровать все действительные числа. Чтобы доказать, что это предположение неверно, достаточно построить хоть одно незанумерованное число. ... поступим следующим образом. Сначала напишем нуль и поставим после него запятую. Потом возьмем число, получившее первый номер, и посмотрим на его первый десятичный знак после запятой (то есть на число десятых)" [3, с.73].

Для определенности заметим, что поиск незанумерованного числа производится, как можно догадаться, на отдельном интервале всех действительных чисел [0, 1], то есть, $\alpha=0$. Сразу же укажем на очевидное, но, похоже, также незамеченное обстоятельство, как в этом рассуждении, так и в предыдущем доказательстве: на самом деле у второго числа вторая цифра тоже будет 0. И у третьего. И у четвертого. И у числа, занимающего бесконечно большую позицию. На словах эта неточность, ошибка, возможно, не совсем ясна, поэтому на рис.1 она показана на непосредственном "виновнике торжества" – на оцифрованном отрезке. На рисунке видно, что первая цифра после нуля будет отличной от нуля, единицей только после точки 0,1 отрезка. На интервале от 0 до 0,1 содержится счетное (пока оспариваемое) количество точек. Во всяком случае, это не одна, не миллион и даже не гугл точек, равный 10^{100}, а в бесконечное число раз больше.

Рис.1. Оцифрованный отрезок, частный интервал всех действительных чисел

У всех этих чисел первой цифрой после запятой будет ноль, а чисел, имеющих бесконечное число нулей после запятой, будет также бесконечное, счетное количество. Поэтому просматриваемые числа будут бесконечно долго находиться вблизи нулевой точки, в самом начале отрезка [0, 1].

"Если эта цифра отлична от 1, то в числе, которое мы пишем, поставим после запятой 1, а если эта цифра равна 1, то поставим после запятой 2" [3, с.73].

Еще раз отметим, что отличная от единицы цифра в первой позиции после нуля первого числа будет нулем. Следовательно, в "искомом" числе после запятой первой будет 1. То есть, число будет 0,1. Сразу же на рисунке находим, что эта точка на отрезке есть – это точка 0,1.

"Затем перейдем к числу, получившему второй номер, и посмотрим на его вторую цифру после запятой. Снова если эта цифра отлична от единицы, то в числе, которое мы пишем, поставим на месте сотых цифру 1, если же эта цифра является единицей, то поставим цифру 2" [3, с.73].

Как и в предыдущем случае, вторым знаком после нуля опять будет ноль, поскольку точки расположены рядом и их номера различаются лишь в очень далекой позиции после нуля. Следовательно, и вторая цифра искомого числа вновь будет 1. То есть, это будет число 0,11. По рисунку видно, что и эта точка на отрезке имеется. Она находится правее точки 0,1 и отстоит от неё примерно на 1/10 отрезка от 0,1 до 0,2.

"Точно так же будем действовать и дальше, каждый раз обращая внимание лишь на n-ю цифру числа, получившего n-й номер. В результате мы выпишем некоторое число, например, N=0,1121211. . . [3, с.73-74].

Но мы уже можем заметить, что такое число не получается. А получится число 0,11111..., в котором цифра 2 появится очень и очень не скоро. И эта новая цифра, двойка также будет тиражироваться многократно, бесконечно. В конечном счете, формируемое число примет вид:

N=0,1111111…2222222...1111111…2222222...

Кстати, можно догадаться по алгоритму, что число будет в основном состоять из единиц, поскольку из 10 цифр единица, которую помечаем двойкой, только одна.

"Ясно, что это число не получило никакого номера: в первом десятичном знаке оно отличается от числа с номером 1, во втором — от числа с номером 2, . . ., в n-м — от числа с номером n и т. д." [3, с.74].

Это глубокое заблуждение. Указанные совпадения, действительно, на первом участке отрезка отсутствуют. Однако это найденное число совпадает в первом знаке с бесконечным множеством чисел, соответствующих другой точке отрезка – [0.1, 0.2]. Первым и вторым знаками оно соответствует множеству чисел следующих точек этого отрезка. Первым, вторым и третьим – следующему множеству точек отрезка. И так далее – до бесконечности! Проще говоря, "найденное" число будет находиться правее числа 0,111... и бесконечно близко к нему, никогда не достигая числа 0,12.

"Чтобы читателю стало яснее, как выписывается число, не получившее номера, предположим, что при выбранной нумерации первые пять чисел имеют следующий вид:

4,27364...
—1,31226...
7,95471...
0,62419...
8,56280... " [3, с.74].

Здесь очевидна мелкая неточность, поскольку автором, судя по всему, и как отмечено выше, выбран интервал [0, 1], а на этом интервале приведенных чисел при выбранной нумерации не будет никогда. Однако эту неточность оставим без критики, просто заменив в них цифру перед запятой на ноль, поскольку пояснение вполне верно описывает сам принцип формирования искомого числа.

"Тогда число, не получившее номера, будет начинаться со следующих десятичных знаков: 0,12121 . . . Разумеется, не только это, но и многие другие числа не получили номеров (мы могли бы заменять все цифры, кроме 2, на 2, а цифру 2 на 7 или выбрать еще какое-нибудь правило). Но нам достаточно существования одного-единственного числа, не получившего номера, чтобы опровергнуть гипотезу о возможности нумерации всех действительных чисел" [3, с.74].

Еще раз отметим, что доказательство на самом деле рассматривает *бесконечно малую часть* всех действительных чисел – на интервале [0, 1]. При этом предложенный способ просмотра чисел изначально некорректен. При таком способе *все просматриваемые* действительные числа на этом интервале реально будут сгруппированы возле нулевой точки. И ожидаемого числа 0,12121, приведенного в качестве примера, получено не будет вообще. А будет образовано указанное выше число N из бесконечного количества единиц после запятой.

Следовательно, в этом отношении доказательство не может достичь успеха, поскольку полученное число точно имеется на близлежащем интервале. Действительно, на ближайшем интервале от *предполагаемо* пропущенной точки, например, от 0,111 до 0,112 присутствуют *все возможные* комбинации знаков после 0,111 и, в том числе, знаков указанного числа N.

Конечно, в доказательстве явно не указана последовательность номеров чисел. Как вариант, числа интервала могли быть перенумерованы (отсортированы) подряд: сначала все возле нуля, затем до 0,1 и так далее. Но это не обязательно. Более того, существует простой способ, наглядно доказывающий счетность *всех мыслимых* видов чисел. Но сначала давайте рассмотрим некоторые иные возможные способы подсчета.

Очевидно, что указанный традиционный метод доказательства несчетности множества действительных чисел содержит явную логическую ошибку и непригоден сам по себе. Этот метод опирается на предположение "если кому-то удалось все их пересчитать, то можно найти пропущенное".

В предыдущем рассмотренном примере с перестановкой запятой (2) такие пропущенные числа очевидны, например, в нем отсутствуют числа 1,111 и 2,222. Однако и традиционный метод нахождения пропущенного числа изначально содержит логическую ошибку, противоречие. Подбор такого числа дает результат, который *изначально обязательно* должен был быть подсчитанным, пронумерованным натуральным числом.

Покажем эту очевидную логическую ошибку такого нахождения отсутствующего числа в более явном виде. Предположим, что в процессе поиска получено новое число, скажем, 0,7182814159.... Однако это число не является новым, отсутствующим в пронумерованном множестве. Это странным образом не замеченное *очевидное* обстоятельство. Очевидно, что последовательности цифр после запятой всех действительных чисел являются полными,

исчерпывающими, содержащими *все без исключения* их возможные комбинации. То есть, любая наперед заданная комбинация цифр, в том числе и у этого "найденного", *обязательно* присутствует в бесконечном множестве действительных чисел. Более того, любое число с конечным числом знаков как фрагмент, шаблон присутствует в этом ряду бесконечное число раз. Например, "найденных" чисел вида 0,718nnn… – бесконечное множество, как и чисел 0,7182814nnn..., где n – любая цифра, поэтому среди них обязательно имеется и "найденное". Следовательно, любое найденное подобным образом число, обязательно имеется среди подсчитанных, то есть, оно пронумеровано, как и любое другое из множества действительных чисел, что означает счетность всех действительных чисел. Связано это с тем, что при поиске отсутствующего числа *количество разрядов* чисел считалось равным общему *количеству чисел*. Однако общее количество чисел, их основание и разрядность связаны простым соотношением

$$N = m^n$$

где

N – количество чисел с основанием m;

m – основание чисел;

n – разрядность чисел.

При использовании описанного метода поиска отсутствующего числа будет просмотрена только их доля:

$$Q = \frac{n}{m^n}$$

Например, в случае пятиразрядных десятичных чисел будет просмотрено только 0,005% от всех чисел. При увеличении разрядности чисел и их массива до бесконечности доля просмотренных чисел будет стремиться к нулю:

$$\% = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{m^n} = 0$$

Получается, что в рассмотренном примере доля просмотренных чисел от общего их количества равна нулю, поэтому любое найденное число обязательно будет присутствовать в их полном наборе.

Ошибки в доказательстве многих тезисов Кантора вызваны выбором специфического некорректного метода подсчета числа элементов, неудачного способа записи последовательностей этих элементов, в результате чего отождествление элементов оказалось завуалированным. Вместе с тем существует достаточно очевидный способ записи элементов континуума, позволяющий строго последовательно записать их все.

Покажем это на примере способа записи всех действительные числа, меньших нуля. Способ записи достаточно очевиден: нужно просто записывать после запятой все последовательные натуральные числа в обратном порядке, инверсно, "задом наперед". Например, под номером 12 345 678 будет записано действительное число 0,87654321, а инверсией последовательных натуральных чисел 996, 997, 998, 999, 1000 будет создан следующий фрагмент последовательности действительных чисел:

0,699→0,799→0,899→0,999→0,0001 и так далее. (3)

Такая инверсная запись дробной части чисел, меньших единицы, позволяет записать всю их непрерывную, бесконечную последовательность. Инверсная запись используется для того, чтобы при возрастании номера сохранялись значащие нули, поскольку при обычной записи будут пропущены, например, действительные числа, имеющие нули сразу после запятой. Очевидно, что бесконечная последовательность содержит все без исключения действительные числа, меньшие нуля, в частности, полную дробную часть чисел π (3,14159...) и числа Эйлера – e (2,71828...), основания натуральных логарифмов, . Для удобства эти дробные числа с нулевой целой частью можно представить, например, записью следующего вида:

$$M_0 = 0,\bar{n} \quad (4)$$

где индекс 0 означает, что все числа этого множества не превышают единицы, то есть, перед запятой у них записан 0, а n со стрелкой влево над ним – это обычное натуральное число, записанное после запятой в обратном порядке как дробная часть этого элемента множества. Очевидно, это число n является порядковым номером соответствующего элемента множества M_0, точки линии.

Теперь возьмем *отрезок*, линию [0, 1] и отождествим каждую точку этой линии с полученной *числовой* последовательностью (4). Очевидно, что каждая точка отрезка будет *единственно* отождествлена с *единственным* числом последовательности, парно. Ни одна точка или число не будут пропущены. Какое бы число мы ни взяли, на линии обязательно будет точка с таким же значением. Наоборот, какую бы мы не взяли точку на линии, этот номер обязательно будет в созданном массиве. Иначе говоря, рассмотренный отрезок числовой прямой [0, 1], континуум оказывается в биективном соответствии со всеми числами созданного множества.

Процесс нумерации элементов массива или точек линии также достаточно очевиден. В этом процессе, как можно обнаружить, точки, элементы линии, числа сформированного ряда, матрицы оказываются расположенными не в виде монотонной последовательности, а "вперемешку".

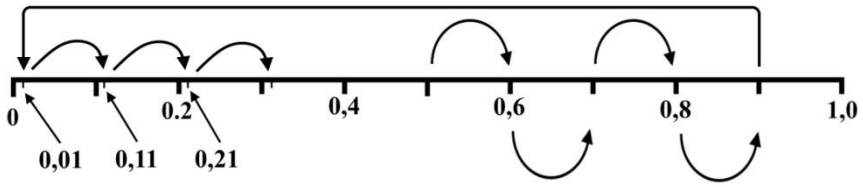


Рис.2. Нумерация точек отрезка

На рис.2 показан фрагмент нумерации точек, начиная с точки 0,5 и заканчивая на точке 0,31. Мы последовательно рассматриваем фрагмент, точки с номерами 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, по которым из выражения (4) определяем значения этих точек: 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 0,01; 0,11; 0,21; 0,31. Как видим, порядковые номера точек равномерно возрастают, но при этом они "скачут" по линии. Отметим главное: фактическое значение точки "возникает" в самом процессе нумерации. То есть, сначала мы выбираем некоторый или очередной, натуральный порядковый номер точки, а затем определяем её местоположение на линии и присваиваем ей этот выбранный номер.

Собственно говоря, нумерация элементов массива и означает присвоение конкретному элементу некоторого определенного номера, как бы навешивание на элемент таблички с номером. Поэтому выбрав элемент, мы можем увидеть его номер, а выбрав номер, узнать, какому элементу он принадлежит. В рассмотренном случае с нумерацией точек линии натуральный порядковый номер, например, 12 389 принадлежит точке на линии со значением 0,98321. Наоборот, точка линии со значением, например, 0,5612999 имеет в массиве порядковый номер 9 992 165.

Такой же алгоритм можно использовать и для нумерации точек плоских или объемных, многомерных объектов, например, точек куба. В случае многомерных объектов номер преобразуется к виду (4) по методу Кантора, созданного им для отождествления точек линии и квадрата [3, с.77].

Предположим, некая точка куба имеет следующие координаты, в которых буквы α, β и γ обозначают любую цифру в этих числах:

$$\begin{aligned} x &= 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n... && -\textit{столбец} \\ y &= 0,\beta_1\beta_2\beta_3...\beta_n... && -\textit{строка} \quad (5) \\ z &= 0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3...\gamma_n... && -\textit{слой} \end{aligned}$$

Используя метод Кантора, формируем из этих чисел новое число:

$$N = 0,\alpha_1\beta_1\gamma_1\alpha_2\beta_2\gamma_2\alpha_3\beta_3\gamma_3...\alpha_n\beta_n\gamma_n... \quad (6)$$

Отсутствующие цифры заменяем нулями. Дробную часть полученного комбинированного числа инвертируем согласно (4), и получаем натуральный порядковый номер рассмотренной точки куба. Например, точка куба с координатами p(x, y, z) = (0,123; 0,321; 0,9171) при комбинировании даст число N=139 221 317 001, что означает порядковый номер точки в бесконечном их массиве, равный 100 713 122 931. Понятно, что обратным преобразованием можно так же найти координаты любой точки по её номеру. Например, точка с порядковым номером 1 234 567 890 имеет в кубе координаты p(0,0741; 0,963; 0,852). Рассмотренный вариант относится к кубу с единичным ребром, но он может быть легко расширен на куб с любым размером ребра, а также на объекты вообще с любым числом измерений.

Наконец, метод позволяет перенумеровать и составные элементы: комплексные числа, кватернионы и тому подобные. Например, комплексное число можно представить в виде

$$z = \alpha_1\alpha_2\alpha_3...,\beta_1\beta_2\beta_3... + i\gamma_1\gamma_2\gamma_3...,\delta_1\delta_2\delta_3...$$

В этой записи буквами α и γ обозначены целая часть числа реальной и мнимой части, а буквами β и δ, соответственно, их дробные части. Например:

$$z = 125{,}2 + i33{,}122$$

Количество цифр α, β, γ и δ в записях может быть любым. Теперь, используя метод комбинации, можно получить число N, инверсная запись которого и будет обозначать натуральный порядковый номер этого числа в их бесконечном массиве. Например, приведенное выше комплексное число будет иметь в бесконечном массиве всех возможных комплексных чисел натуральный порядковый номер 200 123 021 325. Кстати, можно заметить, что в таком массиве первые 10 чисел (0...9) являются реальными, а число i (комплексная единица) имеет порядковый номер 10.

Нетрудно заметить, что нумерация комплексных чисел тождественна нумерации точек квадрата. В этих частных случаях можно легко применить для их нумерации традиционный диагональный процесс Кантора.

Действительно, если составить множество строк, подобных выражению (4), в каждой из которых вместо нуля теперь уже будут записываться последовательные натуральные числа, то образуется квадратная таблица, матрица, содержащая *все без исключения* положительные действительные числа. То есть, запись (4) будет иметь следующую расширенную форму:

$$M_m = \vec{x}, \vec{y} \quad (7)$$

где *x, y* – это обычные натуральные числа, которые, как и выше, записаны в обратном порядке, что обозначено обратными стрелками над ними. Нетрудно догадаться, что эти числа могут обозначать соответствующие координаты точек квадрата. Дублирование строк со знаком минус добавит в таблицу и все отрицательные действительные числа. Если теперь записать матрицу координат точек квадрата по выражению (7) для их подсчета диагональным процессом Кантора [3, с.70], то полученная запись будет иметь, например, такой вид:

0,0→0,1→0,2→0,3→0,4→...→0,01 и так далее.
1,0→1,1→1,2→1,3→1,4→...→1,01 и так далее.
2,0→2,1→2,2→2,3→2,4→...→2,01 и так далее.
3,0→3,1→3,2→3,3→3,4→...→3,01 и так далее.
...
10,0→10,1→10,2→10,3→10,4→...→10,01 и так далее.

Нетрудно заметить, что такая запись содержит весь бесконечный ряд действительных чисел, причем слева (столбцом) и справа от запятой записаны независимые ряды в диапазонах значений от 0 до 1. Понятно, что ряд слева от запятой нужно читать справа налево, добавив в начале него 0 и запятую.

Такая трактовка этих последовательных числовых рядов позволяет присвоить значения их членов координатам точек квадрата, присвоить *каждую пару* этих чисел *x,y каждой* из точек квадрата со стороной 1 – без взаимных пропусков, то есть, обеспечить их полное биективное соответствие. Действительно, каждая точка квадрата на его некоторой, например, горизонтальной линии может быть пронумерована, как и точки линии, дробной частью *x* чисел представленного квадратного массива. Соответственно, каждой линии по вертикали так же может быть присвоен номер *y*, записанный инверсно, то есть, и всё бесконечное множество горизонтальных линий квадрата будет пронумеровано всем рядом действительных чисел, меньших единицы. Теперь все точки квадрата в созданной матрице можно пересчитать диагональным процессом Кантора. Причем, отчетливо видно, что в представленной матрице первая строка номеров точек квадрата *тождественна* строке номеров точек линии (4) при *y* = 0. А это означает, что количество точек на линии в бесконечное число раз меньше количества точек на квадрате.

Конечно, нумерация точек квадрата диагональным процессом менее удобна, чем способом конвертации номеров (6). При конвертации мы легко можем по натуральному порядковому номеру N точки p(*x,y*) определить её координаты *x, y* и наоборот. Использование же в этих целях выражения (7) связано с некоторыми вычислительными трудностями.

Таким образом, приведенные рассуждения позволяют подвести итог и сделать однозначный вывод:

Вся бесконечная последовательность действительных чисел, континуум любого числа измерений являются счётными, все они могут быть пронумерованы натуральными числами.

Счетность всех мыслимых видов чисел

Рассмотрим счетность континуума в еще более широком смысле. Действительные числа являются лишь частью ряда возможных чисел, включающих в себя вещественные, комплексные, кватернионы, гиперкомплексные, поличисла (коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные числа), разнообразные многомерные и любые иные виды чисел. Здесь нас не должны интересовать алгебры этих чисел и их свойства. Единственное не обязательное условие – это конечная длина записи составного числа. То есть, запись числа в виде бесконечного ряда коэффициентов мы пока оставим без внимания.

Как составное в общем виде можно записать любое мыслимое число, например, в следующем виде

$$a = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 ... + \alpha_n C_n + ...$$

где

α – любое вещественное число;

С – любой индекс, например, мнимая единица i.

Например, число может иметь вид 2,71828... – действительное число, или 3+2i – комплексное число, или 5+2i+3j+8k – кватернион. Правильно организованный способ подсчета этих чисел позволяет показать счетность всего их ряда. Вообще-то, такой результат является простым следствием принятого способа подсчета. Воспользуемся рассмотренным выше способом записи всех действительных чисел: запишем после запятой все последовательные натуральные числа "задом наперед", а до запятой – в каждом ряду возрастающие натуральные числа на всём числовом диапазоне. Возникает, например, такой фрагмент последовательности действительных чисел (3):

0,699→0,799→0,899→0,999→0,0001 и так далее.

Последовательность чисел в таблице будет содержать все без исключения числа. С действительными числами, видимо, неясностей нет, поэтому покажем, как в этом ряду поместились, например, кватернионы. Для их формирования воспользуемся обратным методом Кантора [3, с.77]. Как известно, он формирует новое число из двух следующим образом (5):

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

$$y = 0,\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

$$z = 0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3...\alpha_n\beta_n...$$

У двух действительных чисел x,y берутся цифры после запятой и поочередно вписываются после запятой третьего числа z. Мы проделаем обратную операцию, сформируем из одного числа несколько коэффициентов, например, для кватерниона. Возьмем из полученного ряда какое-либо число z и будем рассматривать его как составное (2), отбросив запятую:

$$z = [\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\alpha_3\beta_3\gamma_3\delta_3\alpha_4\beta_4\gamma_4\delta_4]...$$

Очевидно, что все составляющие число цифры гарантируют любую возможную комбинацию, поскольку ряд чисел z бесконечен. Теперь составим из одноименных цифр новое число, кватернион:

$$q = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 i + \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 j + \delta_1\delta_2\delta_3\delta_4 k$$

Здесь в каждом целочисленном коэффициенте показаны только четыре цифры, но, очевидно, их может быть любое количество. Также очевидно, что и самих коэффициентов может быть любое число: один коэффициент – это действительное число, два – комплексное число и так далее. Понятно, что полученный ряд *всех* возможных чисел является счетным, каждое из чисел имеет свой индивидуальный *натуральный* порядковый номер. Счетность ряда обеспечивается, например, использованием метода квадратов, предложенного математиком-филателистом из рассказа об отелях с бесконечным числом номеров [3, с.56], являющимся эквивалентом диагонального процесса Кантора.

Порядок подсчета чисел соответствует правилу нумерации членов ряда, то есть, каждое число из таблицы получит *свой индивидуальный натуральный порядковый номер*, будет пронумеровано. Каким бы ни было количество всех действительных чисел, наше движение не пропустит ни одного из них, и каждое из них получит свой индивидуальный натуральный номер. Таким образом, можно сделать вывод: континуум является счетным. Использованием канторовского метода индексации, мы корректно включаем в этот континуум все мыслимые виды чисел.

Библиографический список:

1. Бесконечность, Википедия, URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Бесконечность
2. Виленкин А., Мир многих миров: Физики в поисках параллельных вселенных. Алекс Виленкин, пер. с англ. А.Сергеева. — М.: АСТ: Астрель : CORPUS, 2010, 303 с.
3. Виленкин Н.Я., В поисках бесконечности.— М.: Наука, 1983, 160 с.
4. Крейг У., Самое начало. Происхождение Вселенной и существование Бога, URL: http://www.otkrovenie.de/beta/xml/other/samoeNachalo.xml
5. Линде А.Д., Инфляция, квантовая космология и антропный принцип. Перевод Карпова С., URL: https://arxiv.org/abs/hep-th/0211048
6. Новиков И. Д., Черные дыры и Вселенная. — М.: Мол. гвардия, 1985. — 190 с., ил.— (Эврика).

Путенихин Петр Васильевич
Putenikhin Peter Vasilievich
Независимый исследователь

УДК 510.22; 514.01; 514.12.01

КОРРЕКТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОТЕЛЕ ГИЛЬБЕРТА

THE CORRECT SOLUTION TO THE PROBLEM OF THE GILBERT'S HOTEL

Аннотация: Вскрыты ошибки Кантора и его последователей в логических рассуждениях о бесконечных множествах. Показана ошибочность доказательства несчетности континуума, несчетности всех действительных чисел. Показана ошибочность рассуждений в задаче об "Отеле Гильберта".

Abstract: Cantor's proofs of infinite sets contain contradictions, logical errors. It is shown the erroneousness of the proof the uncountable of the continuum, uncountable all real numbers.

Ключевые слова: множество, бесконечность, Кантор, равномощность, число, биективное соответствие, противоречие

Keywords: set, infinity, Cantor, equipotence, number, bijective correspondence, contradiction

Задача об "Отеле Гильберта"

Задачи о бесконечных множествах не только интересны, но и, судя по всему, являются весьма сложными. Часто можно встретить рассуждения серьёзных специалистов, являющиеся ошибочными из-за элементарных, по сути, тривиальных упущений, логических недочетов. Такие недочеты можно встретить в пересказах известной задачи об отеле, которую, как считается, предложил Гильберт где-то в третьем десятилетии 20 века [3, с.70-71; 3; 4; 5].

Представим себе гостиницу, отель с бесконечным числом комнат. Комнаты пронумерованы натуральными числами от 1 до ∞. Однажды в гостиницу вошел человек и попросил снять комнату. Но, к сожалению, для нового гостя комнаты не нашлось, так как отель был *полностью заполнен* бесконечным числом гостей, и попросту не было ни одного свободного номера. Как предоставить новому гостю свободную комнату, не выселяя никого из постояльцев?

Несмотря на то, что по условиям задачи *все номера заняты*, утверждается, что существует, тем не менее, возможность выделить сколько угодно свободных комнат. Для этого необходимо переселить постояльца из первой комнату во вторую, постояльца из второй комнаты в третью и так далее. То есть, каждого постояльца из комнаты с номером n необходимо переселить в комнату с номером n+1, n→n+1. В результате этого освобождается комната с номером один, и в неё можно поселить нового гостя. Здесь явно подразумевается, что переселение выселением не является.

Однако предложенное решение ошибочно. Собственно математическая ошибка состоит в том, что за большим числом постояльцев как-то незаметно прячется суть задачи. Математической процедурой, манипуляцией с бесконечностями подменяется само содержание исходного тезиса: подселение в заполненный отель дополнительных постояльцев. Показать эту подмену можно, если взять противоположный предельный вариант: в отеле всего один номер, и он занят. Для того чтобы поселить нового, прежнего постояльца временно выселяют буквально в коридор под предлогом переселения. Здесь, как видим, и обнаруживается скрытая подмена понятий переселения и выселения. Вновь пришедшего гостя селят в освободившийся номер. Но прежнего постояльца тоже надо куда-то поместить. Поэтому вновь заселенного гостя опять выселяют, а на его место селят прежнего постояльца. И так по кругу. В конечном счете, каждый из них в номере проживает только половину времени, а вторую – на стуле в коридоре.

В таком варианте задача принципиально ничем не отличается от задачи с бесконечным числом комнат. Добавим ещё одну комнату и будем по кругу переселять теперь уже троих постояльцев. Можно добавить и четверную комнату и производить всё ту же процедуру "переселения-выселения". Дойдя до бесконечности, мы и получим парадокс отеля в исходном варианте. Однако в его минимальной конфигурации мы явно обнаруживаем: постояльцы, по сути, часть времени проводят на стуле возле комнаты. При бесконечном числе комнат и конечном числе новых постояльцев это время стремится к нулю. Отличие только в этом. Если же число постояльцев растет, как предлагается в расширенных версиях парадокса, то и время "на стуле около комнаты"

также будет расти вплоть до той же исходной величины – половины времени проживания. Действительно, если каждый раз нужно расселить столько же новых гостей, сколько номеров в отеле, то, очевидно, именно столько гостей будет постоянно находиться и в коридоре. При равном увеличении числа гостей и номеров до бесконечности это соотношение всегда будет один к одному. То есть, такое решение «парадокса» с бесконечным переселением, по сути, является подменой понятий. Главный принцип отелей: постоялец должен вселиться и жить в нем, пока сам не решит его покинуть.

Несостоявшаяся перепись

Парадокс отеля оказался настолько интересным и показательным, что получил дальнейшее развитие, которое описано, например, в виде шутливого научно-фантастического рассказа от имени вымышленного персонажа. В развитие сюжета добавлен эпизод с пересчетом свободных номеров:

"... пришел приказ составить заранее все возможные варианты заполнения номеров. Эти варианты потребовали представить в виде таблицы, каждая строка которой изображала бы один из вариантов. При этом заполненные номера должны были изображаться единицами, а пустые нулями. Например, вариант 101010101010... означал, что все нечетные номера заняты, а все четные пустые, вариант 11111111111... означал заполнение всей гостиницы, а вариант 000000000000... означал полный финансовый крах — все номера пустовали" [3, с.71].

В общем виде цитата представляет продолжение рассказа об "Отеле Гильберта" для случая бесконечного числа отелей с бесконечным числом номеров и бесконечным множеством гостей. Но без нарушения общности при рассмотрении вероятных парадоксов, возникающих в таком тресте отелей можно считать, что отель единственный. Итак, форма затребованного отчета в цитате определена. Отчет, как можно заметить, довольно замысловатый, поэтому следует определить оптимальный способ его составления:

"Директор... придумал простой выход из положения. Каждой дежурной по этажу было поручено составить столько вариантов заполнения, сколько номеров было в ее ведении. При этом были приняты меры, чтобы варианты не повторялись. Через несколько дней списки были представлены директору, и он объединил их в один список" [3, с.71].

Поскольку способ описан недостаточно детально, немного проясним его с учетом предыдущей информации из книги. На каждом этаже у дежурной должно быть бесконечное, счетное в общем случае, количество номеров. В противном случае вариантов у неё будет конечное количество, то есть, каждое двоичное число будет иметь вполне определенное число знаков. Например, 10^{165} нулей и единиц. В этом случае задача имеет однозначное решение при бесконечном количестве гостиниц и этажей, поскольку любая счетная (потенциальная) бесконечность перекрывает любое конечное число вариантов.

Но, с другой стороны, если на этаже счетное количество номеров, то и в этом случае будет получен список вариантов, содержащий *все возможные комбинации* из бесконечного (счетного) числа нулей и единиц. То есть, и в этом случае задача решается однозначно, то есть, список вариантов будет единственным и полным. Кроме того, в отеле этажей, как следует из описания, больше одного. Поэтому нумерация номеров также не должна пересекаться, то есть, одинаковых номеров комнат в многоэтажном отеле быть не должно.

И, тем не менее, исходя из этих данных, рассказчик заявляет, что общий список, составленный на основе представленных дежурными данных, неполон:

" – Могу ручаться, что список неполон. Я берусь указать вариант, который наверняка пропущен... Мы заключили пари. Чтобы выиграть его, я предложил прибить каждый вариант на дверь того номера, которому он соответствовал..." [3, с.71].

Для определенности будем считать, что список вариантов отсортирован по возрастанию, а нумерация комнат на первом этаже гостиницы начинается с номера 1 и затем по остальным этажам ведётся единая сквозная, нарастающая нумерация. Заметим, что число знаков в номере – бесконечное, поэтому и этот номер 1 должен быть записан с большим количеством нулей перед этой единицей.

Выполняя своё обещание, рассказчик переходит от двери к двери и формирует в своём блокноте обещанный отсутствующий номер комнаты.

"А потом я поступил очень просто. Подойдя к двери первого номера, я увидел, что соответствующий вариант начинается с цифры 0. Немедленно в блокноте появилась цифра 1; это и была первая цифра варианта, который мне хотелось составить" [3, с.72].

Еще раз отметим, что мы рассматриваем один отель с бесконечным количеством этажей и бесконечным количеством комнат на них, причем нумерация комнат – сквозная и начинается с номера на первом этаже.

"Когда я подошел к двери второго номера, то первая цифра соответствующего варианта меня не интересовала, ведь первая цифра моего варианта была уже написана. Поэтому все внимание было обращено на вторую цифру. Увидев, что эта цифра 1, я записал в своем блокноте цифру 0. Точно так же, обнаружив, что третья цифра варианта, прибитого к двери третьего номера, тоже 1, я записал в блокноте цифру 0. Вообще, если я обнаруживал, что n-я цифра n-го варианта есть 0, то писал в своем блокноте на n-и месте цифру 1, если же n-я цифра n-го варианта была 1, то я писал у себя 0. Когда я обошел все номера гостиницы, то в блокноте оказалась записанной последовательность нулей и единиц" [3, с.72].

Методика понятна и на первый взгляд разумна и логична, но верные ли выводы из неё делает рассказчик? Он заявляет, что сформированный в блокноте вариант действительно пропущен, ведь он отличается от первого своей первой цифрой, от второго – второй и так далее:

" – Вот, полюбуйтесь на пропущенный вариант.

– А откуда известно, что он пропущен?

– Он не может быть первым, так как отличается от него первой цифрой, не может быть вторым, так как отличается от него второй цифрой, третьим, так как отличается от него третьей цифрой, и вообще n-м, так как отличается от него n-й цифрой" [3, с.72].

К сожалению для рассказчика, выводы его совершенно не логичны. Это ошибочные выводы. Каким бы ни был этот найденный рассказчиком вариант, он обязательно имеется в *бесконечной монотонной последовательности* нулей и единиц. Далее, в его списке искомый номер начинается с цифры 0. Даже навскидку видно, что это всего-навсего первый, старший разряд *самого первого бинарного числа бесконечной длины*, имеющего вид: ...00001, где перед единицей имеется бесконечное количество нулей. Более того, якобы найденный рассказчиком "отсутствующий" вариант почти полностью состоит из ведущих нулей, поскольку первый не нулевой символ ему встретится только где-то вблизи бесконечного конца общего количества номеров в отеле, если таковая вообще достижима. Это можно наглядно показать на примере массива простейших пятизначных двоичных чисел:

00000, 00001, 00010, 00011, 00100 и так далее,

массиве, содержащем всего 32 числа, первые 16 из которых начинаются с нуля. Следовательно, если номер первой комнаты отеля начинается с нуля, то нулем будет и вторая цифра номера второй комнаты, третья – третьей комнаты. И так на бесконечном количестве дверей. Поэтому в блокноте вторая цифра, как и первая, также будет единицей. И третья. И четвертая. И так до счетной бесконечности.

Но как же так?! Получается, что все комнаты будут иметь один и тот же нулевой номер?! Конечно, нет, комнаты будут иметь *все возможные* номера. Но найденное рассказчиком число, в общем случае бесконечного числа номеров, да, разумеется, будет состоять буквально из одних нулей. Это связано с тем, что при бесконечной длине последовательности нулей и единиц первая ненулевая цифра в номере при указанном способе поиска в общем случае, как будет показано ниже, ему встретится очень и очень нескоро.

"... какое бы счетное множество вариантов ни взять, всегда найдется вариант, не вошедший в это множество... А это и значит, что множество всех вариантов заполнения гостиницы несчетно..." [3, с.72].

Это ещё одно ошибочное, совершенно необоснованное утверждение. Эта ошибочность очевидна, поскольку бесконечное (счетное) число вариантов бинарных чисел *по определению* содержит *весь натуральный бинарный ряд* чисел. Без пропусков и повторов. Это в точности то же самое, как заявить, что есть натуральные числа, не вошедшие в натуральный ряд. Поэтому на дверях гостиницы будут прибиты *все без исключения возможные варианты* двоичных чисел бесконечной длины (разрядности), множество из которых будут иметь в своей начальной, старшей части бесконечный ряд нулей. Как указано в рассказе, первая комната в отеле имеет нулевой номер, поэтому в описанном способе "нахождения" не проходит также и хитрость с отбрасыванием ведущих нулей:

0, 1, 10, 11, 110, 111, 1110, 1111, 11110 и так далее,

поскольку в этом случае у второй комнаты в номере отсутствует вторая цифра, у третьей –

третья, у четвертой – четвертая и так далее.

Не столь очевидной, но при этом главной причиной ошибки является то, что при поиске "отсутствующего" числа по непонятной причине приравнивалось количество *разрядов* чисел (записей в блокноте) общему количеству всех *чисел*. Хотя это, в сущности, достаточно очевидное и даже тривиальное обстоятельство. Почему оно оказалось незамеченным, непонятно. Действительно, общее количество чисел, их основание и разрядность связаны простым соотношением

$$N = m^n$$

где

N – количество чисел с основанием m;

m – основание чисел: десятичные, двоичные и т.д.;

n – разрядность чисел, числового ряда.

Например, общее количество чисел с основанием 10 (десятичные) и разрядностью 5 равно 100 000, то есть, от 00000 до 99 999. А количество чисел с основанием 2 (бинарных) и числом разрядов 16, соответственно, равно 2^{16} – или 65 536 чисел от 0000 0000 0000 0000 до 1111 1111 1111 1111. Точно такие же соотношения можно составить и для любых других оснований – шестнадцатеричного, восьмеричного и так далее. Рассказчик и его герой в рассказе, а также все их последователи искали пропущенное число поразрядно, то есть, переходя от двери к двери комнат отеля, добавляли к записи в блокноте всё новый и новый разряд, полагая, что тем самым они просмотрели все возможные числа, номера комнат. Но на самом деле, как видно из соотношения, они переберут только количество чисел, равное их *разрядности*. Например, рассмотрим разрядность бинарных чисел, равную 5. Тогда их общее количество в массиве равно 32. Вот эти числа, расположенные в каждом столбце сверху вниз, затем переход к следующему столбцу:

1	00000	01000	10000	11000
2	00001	01001	10001	11001
3	00010	01010	10010	11010
4	00011	01011	10011	11011
5	00100	01100	10100	11100
6	00101	01101	10101	11101
7	00110	01110	10110	11110
8	00111	01111	10111	11111

Поскольку при поиске недостающего числа каждый раз приписывается число справа, то найденное число будет представляться последовательно на каждом шагу в следующем виде (вместо нуля пишем 1, а вместо 1 пишем 0):

Шаг 1: 1	10000
Шаг 2: 11	11000
Шаг 3: 111	11100
Шаг 4: 1110	11100
Шаг 5: 11101	11101.

Здесь во второй колонке эти же числа представлены в сопоставимом виде – как полноценно 5-разрядные. Итак, на первом шаге мы видим первую цифру 0, поэтому записываем единицу. На втором шаге во втором слева разряде видим снова 0, поэтому опять пишем 1. На третьем шаге – точно так же. Зато на четвертом шаге в четвертом разряде числа мы видим 1, поэтому записываем 0. Наконец, на последнем, пятом шаге мы вновь видим в последнем разряде цифру 0, поэтому вновь записываем единицу.

Больше шагов нет и в принципе быть не может, поскольку отсутствующее число может быть только 5-разрядным и не существует номера, у которого есть шестая цифра. И что мы при этом обнаруживаем? Во-первых, как и декларировалось, найденное число отличается в первом разряде от первого числа, во втором – от второго и так далее. Однако, во-вторых, как видим, просмотрены далеко не все числа, а только их часть, причем в количестве, равном разрядности чисел. Наконец, в-третьих, в полном перечне чисел найденное якобы отсутствующее число имеется! Это, как легко обнаружить, третье число от конца массива.

Еще раз отметим, что метод просматривает совсем даже не все числа, а только их количество, равное разрядности числа. Но ведь по условиям рассказа об отелях номеров на этаже – бесконечное количество, то есть, разрядность каждого числа также равна бесконечности. Тем не менее, это

ровным счетом ничего не меняет, в этом случае герой рассказа точно так же просмотрит не все числа, а только их часть, и найденное им якобы отсутствующее число обязательно будет присутствовать среди чисел, до которых он просто никогда не дойдёт.

Действительно, вернёмся к нашему примеру с 5-разрядными числами. Нетрудно обнаружить, что из общего количества 32 чисел просмотрено будет только 5 или примерно 16%. Конечно, это касается только рассмотренного случая. А если разрядность чисел – 10? Тогда, понятно, и просмотрено будет только 10 чисел, столько, сколько у них разрядов. При этом общее количество чисел в массиве 2^{10}, то есть, примерно 1000 чисел, что теперь составляет уже только 1%. При увеличении разрядности чисел до бесконечности процент просмотренных чисел будет стремиться к нулю:

$$\% = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{m^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

Получается, что доля просмотренных героем рассказа чисел от общего их количества равна нулю, поэтому нет ничего удивительного, что любое найденное им число обязательно будет присутствовать в их *полном* наборе. Собственно говоря, это тривиальный, очевидный факт: всё бесконечное множество чисел бесконечной разрядности содержит все возможные числа, то есть, это тождественно весь натуральный ряд чисел, поэтому "отсутствующих" чисел в нём быть не может просто по определению.

Указанное выше обстоятельство, что найденное рассказчиком число будет состоять из одних нулей, следует из ещё одного очевидного соотношения. Общее количество чисел в бесконечном массиве бинарных n-разрядных чисел, как указано, равно 2^n, при n, стремящемся к бесконечности. Поскольку разрядность чисел равна n, из их общего количества будет просмотрено именно столько – n, которое стремится к бесконечности. Но рассказчик, согласно алгоритму поиска, просматривает эти числа "сверху", то есть, отбрасывая все младшие знаки числа после первых n знаков. Другими словами, из общего бесконечного количества бинарного натурального ряда, рассказчик просмотрит только первые n чисел без младших разрядов. Соответственно, самое большое из этих просмотренных чисел будет иметь значение n. Следовательно, рассказчик никогда не дойдет до числа $2^n - n$.

Теперь определим, сколько нулей слева до первой единицы содержит самое большое из просмотренных чисел. Число разрядов – n, причем само это число также может быть записано как бинарное – $n_2=\log_2 n$, где n_2 – количество бинарных разрядов числа n в использованной двоичной кодировке. Для наглядности продемонстрируем эту запись на конкретных примерах. Массив 8-разрядных двоичных чисел содержит 256 элементов. Само число – разрядность имеет число разрядов:

$$n_2 = \log_2 8 = 3$$

То есть, для записи числа 8 требует 3 бита (разряда). При просмотре массива в процессе поиска "отсутствующего" числа будет просмотрено только 8 первых чисел из 256 и при этом никогда не будет достигнуто число 256 – 8 = 248. Самое большое из просмотренных чисел – число 8 (1000_2), поэтому в развернутом, полном виде оно запишется как 00001000. Как видим, во всех просмотренных числах нулями будут, по меньшей мере, первые 4 разряда. Это обстоятельство можно записать в виде уравнения:

$$N_{\max} = n_2 - \log_2 n - 1 \quad (1)$$

В рассмотренном случае имеем минимальное число нулей перед первой единицей, равное 4. По аналогии можем рассмотреть еще несколько примеров бинарных чисел разной разрядности:

$$N_{\max 4} = 4 - \log_2 4 - 1 = 4 - 2 - 1 = 1$$

$$N_{\max 8} = 8 - \log_2 8 - 1 = 8 - 3 - 1 = 4$$

$$N_{\max 16} = 16 - \log_2 16 - 1 = 16 - 4 - 1 = 11$$

$$N_{\max 32} = 32 - \log_2 32 - 1 = 32 - 5 - 1 = 26$$

$$N_{\max 64} = 64 - \log_2 64 - 1 = 64 - 6 - 1 = 57$$

Для 8, 16 и 32-х разрядных массивов эти предельные, последние из просмотренных в поиске чисел имеют вид:

8 – 0000'1000

16 – 0000'0000'0001'0000

32 – 0000'0000'0000'0000'0000'0000'0010'0000'

Для разрядности, не являющейся степенью двойки, логарифм следует округлять в нижнюю сторону, к ближайшему меньшему значению степени двойки. Поэтому в рассмотренном выше случае 5-разрядного массива имеем:

$$N_{\max 5} = 5 - \log_2 5 - 1 = 5 - 2 - 1 = 2$$

То есть, минимальное число нулей перед первой единицей в просмотренных при поиске числах, будет равно 2. Действительно, выше мы это число нашли: 00100. Если увеличить разрядность массива n до бесконечности, то, согласно (1) минимальное количество нулей перед первой единицей в просматриваемых числах также вырастет до бесконечности:

$$N_{\max} = \lim_{n \to \infty} (n_2 - \log_2 n - 1) \Rightarrow \infty$$

Конечно, перебирать разряды при подборе "отсутствующего" числа можно и в обратном порядке, с младших разрядов номеров комнат. Но и в этом случае очевидно, что просмотрена будет только незначительная часть всех номеров по той же причине: процент их для бесконечно большого массива равен нулю.

Библиографический список:

1. Виленкин Н.Я., В поисках бесконечности.— М.: Наука, 1983, 160 с.
2. Крейг У., Самое начало. Происхождение Вселенной и существование Бога, URL: http://www.otkrovenie.de/beta/xml/other/samoeNachalo.xml
3. Парадокс Гильберта, URL: http://pikabu.ru/story/paradoks_gilberta_1962200
4. Парадокс Гильберта, URL: http://traditio-ru.org/wiki/Парадокс_Гильберта
5. Парадокс Гильберта, Википедия, URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Список_парадоксов
6. Дополнения к статье, Самиздат, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/gilb-dop.shtml

Путенихин Петр Васильевич
Putenikhin Peter Vasilievich
Независимый исследователь

УДК 521.9; 524.8; 524.882

ПРОТИВОРЕЧИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ БЕЛЫХ ДЫР

CONTRADICTIONS OF THE COSMOLOGICAL WHITE HOLES

Аннотация: Космологическая Белая дыра является следствием ошибочной трактовки частных решений общей теории относительности. Такого объекта не существует, реально существующим физическим объектом является только Черная дыра. Феномен космологической Белой дыры как антагониста Черной дыры возник в результате преобразования шварцшильдовского уравнения интервала с целью устранения координатной сингулярности. Однако изображение на диаграммах Черной и Белой дыр и их двух сингулярностей выявляет противоречия, требующие признать, что Черная и Белая дыры – это одна и та же Черная дыра, а две сингулярности являются одной сингулярностью.

Abstract: The cosmological White Hole is a consequence of the erroneous interpretation of particular solutions of the general relativity. There is no such object, a real physical object is only the Black Hole.

Ключевые слова: Черная дыра; Белая дыра; диаграмма Шварцшильда; диаграмма Крускала-Шекереса (Секереша); диаграмма Пенроуза; черепашья координата; параллельная Вселенная; обмен ролей; времениподобный; пространственноподобный; геодезическая; конформный

Keywords: Black Hole; White Hole; the Schwarzschild diagram; the Kruskal-Szekeres diagram; the Penrose diagram; tortoise coordinate; parallel universe; exchange of roles; timelike; spacelike; geodesic; conformal

Гипотезы о параллельных мирах

Математическая сущность любых координатных диаграмм состоит в том, что это обычная хотя и не всегда привычная система координат, содержащая координатные оси и координатную сетку, будь то классические декартовы координаты, полярные координаты или любые иные. На плоскости листа или экрана эти координатные диаграммы позволяют наглядно, визуально, графически показать свойства исследуемых функций, наборов данных, таблиц. Следовательно, между графиками, фигурами и их аналитическими представлениями на таких диаграммах в принципе не должно быть никаких несоответствий. Всякая функция имеет некоторый набор, массив значений, и каждому из этих значений должна соответствовать реальная точка на диаграмме. Напротив, если на диаграмму наносится какая-либо точка, то она, в свою очередь, в обязательном порядке должна быть тем или иным решением отображаемой функции.

В этом отношении такое соответствие чаще всего выполняется. Однако есть и едва заметные отклонения. Бывает, что такое соответствие отсутствует, но впечатление о его наличии создается интуитивно. Можно назвать это своеобразной иллюзией, когда нет реальной, технической возможности точно отобразить на графиках аналитические соотношения, изображение приводится в несколько образном, абстрактно-иллюстративном виде. Во многих случаях это вполне допустимо и не является принципиальным недостатком таких диаграмм. Однако области и точки, как бы автоматически появляющиеся на таких диаграммах, графиках и на самом деле не имеющие соответствующих аналитических решений, в некоторых случаях все-таки недопустимы. В этом случае приписывать такие отсутствующие решения исходным аналитическим выражениям, безусловно, нельзя и всегда нужно соблюдать осторожность, чтобы не допустить такого приписывания неумышленно. Диаграммы, как правило, производны от аналитики, поэтому ошибки на них не столь опасны, как в аналитических выражениях. Если же такое несоответствие обнаруживается явным образом, то в этом случае решающим является выяснение источника ошибки – чрезмерно условны либо диаграммы, либо аналитические выражения. Заметим, что парадоксальным, противоречивым чаще всего является не само решение и его диаграммы, а их последующая интерпретация.

В литературе иной раз можно встретить высказывание вида "плохого (неудачного) выбора", которое, по большому счету, можно применить ко многим выкладкам как в физике [17, т.3, с.20], так

и в других науках. Но далее мы обратим внимание лишь на "неудачный выбор системы координат" в теории гравитации – общей теории относительности. В первую очередь нас интересует, каким образом в общей теории относительности строго научно возникает многомерное и многомировое пространство. Каким образом в ней обосновывается появление параллельных вселенных, Белых дыр и мостов между Вселенными.

Диаграммы Шварцшильда

Одной из наиболее наглядных демонстраций параллельной Вселенной в общей теории относительности, несомненно, является максимально расширенное решение Шварцшильда на диаграммах Пенроуза для так называемой вечной Черной дыры, на которых параллельная Вселенная фактически появляется как неизбежный элемент.

Понятия параллельных миров и многомерных пространств чаще всего, если не всегда, связывают с так называемым мостом Эйнштейна-Розена. Прежде всего, видимо, следует немного уточнить смысл этого понятия. Возникло оно при рассмотрении одного из первых широко известных решений уравнений общей теории относительности Эйнштейна, решения Шварцшильда, которое чисто математически, аналитически предсказало существование так называемых "невидимых звёзд" – космологических Черных дыр. Изначально непосредственно о параллельных мирах авторы речи не вели. Тем не менее, некоторые из их рассуждений позволяют все-таки произвести более широкую трактовку.

Традиционно, ввиду сферической симметрии звезды, уравнения теории относительности записывают в сферических координатах. Решение Шварцшильда для сферически симметричного статического гравитационного поля в этом случае приобретает вид:

$$ds^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1)$$

Решение предполагает, что $r > 2m$, хотя полное пространство-время захватывает и область $0 \le r < 2m$, а сферические углы изменяются в диапазонах $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Последнее слагаемое обращается в нуль при $\theta = 0$. Обращение в нуль означает радиальное движение, и то, что ни одно из пространственных направлений вокруг звезды не является выделенным. Обращение же в бесконечность второго слагаемого вблизи $r = 2m$ означает проявление так называемой координатной сингулярности. Появление сингулярных точек в физической теории является для неё сигналом о том, что теория столкнулась с серьёзными затруднениями. Для устранения координатной сингулярности в уравнении Шварцшильда (1) делается замена переменной:

$$u^2 = r - 2m$$

В результате такой замены ни один из коэффициентов в метрике больше не обращается в бесконечность (5а):

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2+2m}dt^2 - 4(u^2+2m)du^2 - (u^2+2m)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Замена переменной и приводит к возникновению традиционного понятия моста Эйнштейна-Розена:

"Когда u меняется от $-\infty$ до $+\infty$, переменная r изменяется от $+\infty$ до 2m и затем снова от 2m до $+\infty$. Попытка интерпретации регулярного решения (5а) в пространстве r, θ, φ, t приводит к следующему результату. Четырехмерное пространство математически описывается двумя конгруэнтными областями или "листами", соответствующими значениям $u > 0$ и $u < 0$, которые соединяются гиперплоскостью $r = 2m$ или $u = 0$, на которой g обращается в нуль. Такое соединение двух листов мы назовем "мостом" [20, с.428].

Можно сказать, что здесь мост приобрел самые весомые основания и реальные очертания. И для этого потребовалось всего лишь изменить переменную.

Однако внимательно рассмотрим вновь созданную картину. Мы помним, что система координат рассматриваемого решения Шварцшильда является сферической. Такая система характеризуется, в частности, радиус-вектором, длина которого всегда положительна, то есть, $0 < \rho < +\infty$. Соответственно, в исходном решении Шварцшильда величина радиуса также изменяется в этих пределах $0 < r < +\infty$. Внутри именно этого интервала и возникает координатная сингулярность $r = 2m$.

Обратимся вновь к уравнению модифицированного интервала Шварцшильда. Здесь параметр u стал новым, хотя и отвлеченным радиусом-вектором. И этот эмулированный радиус-вектор u

изменяется как-то странно, в интервале от *минус* до плюс бесконечности. Какой геометрический смысл имеют сферические координаты с *отрицательным* радиус-вектором? Отметим это: изначально диапазон сферического пространства-времени обеспечивался классическим радиусом-вектором положительной величины. Теперь этот же диапазон *дважды* формируется новым параметром, причем оказался "вырезанными", отброшенным интервал внутри Черной дыры $0 < r < 2m$. То есть, один и тот же диапазон пространства-времени просто-напросто дублируется. Почему же этот один и тот же диапазон рассматривается как два *разных* диапазона? Мы ведь могли сделать и другую замену. Например, если добавить всего лишь один индекс, то ситуация приобретёт довольно экстраординарный характер:

$$u_n^2 = r - 2m$$

где $n = 0, 1, 2, 3$ и так далее, либо вообще любое число – действительное, комплексное, кватернион, а $-\infty < u_n < +\infty$

Имеем ли мы право добавить такой индекс? А почему нет? Математически он не более противоречив, чем использованный Эйнштейном, зато физически приводит к совершенно корректному появлению *любого желаемого числа* параллельных Вселенных. Можно и далее использовать возможности этого метода. Например, квантовая механика, как известно, широко оперирует комплексными числами. В частности, известная плоскость Аргана, по существу, представляет собой массив комплексных чисел, комплексную плоскость или геометрическое представление комплексных чисел. На этой плоскости мнимая и реальная части комплексного числа представляются просто как ортогональные координатные оси. Поэтому представление параметра u_n как модуля комплексного числа добавляет еще один бесконечный *массив* параллельных Вселенных, поскольку такие векторы заполняют всю комплексную плоскость. Если же представить параметр u_n как кватернион, ещё одну разновидность комплексных чисел, то массив параллельных Вселенных станет вообще четырехмерным гиперкомплексным пространством. В этом случае уравнение Шварцшильда следует рассматривать в четырехмерном гиперкомплексном пространстве, а сами мосты уже будут неизбежно многомерными.

Добавим, что существует немало и других подобных замен переменных в решениях уравнений Эйнштейна. Невозможно отрицать, что именно эти замены и привели к появлению многослойных параллельных миров на диаграммах Крускала-Шекереса, Пенроуза и других. Именно этим и только этим можно объяснить появление кротовых нор в решениях Шварцшильда, Керра, Райсснера-Нордстрёма для стационарных, вращающихся и заряженных Черных дыр.

Однако всё это явно искусственные приемы, ни в коем случае прямо не следующие из метрики Шварцшильда. Иначе говоря, появление классического моста Эйнштейна-Розена явилось следствием плохо обоснованного удвоения числа решений уравнения Шварцшильда и весьма вольной *частной* трактовкой метода замены переменных, подстановки.

Падение частиц на горизонт Шварцшильда

Для последующего анализа нам понадобятся результаты решения одной из простейших, но, тем не менее, интересных задач: о свободном радиальном падении фотонов на шварцшильдовскую Черную дыру. Интерес состоит в ожидаемой возможности увидеть процесс образования, возникновения параллельного мира и Белой дыры, возможности осуществления движения по неким дополнительным гиперпространственным измерениям. Для построения уравнений движения рассмотрим уравнение интервала в сферических координатах (1):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Падение будем рассматривать, как и многие другие авторы, вдоль нулевой угловой координаты θ, поскольку в этом случае последнее слагаемое обнуляется:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2$$

Для построения уравнений движения, то есть, зависимости от времени удалённости фотона от горизонта событий, нам необходимы дополнительные условия. Воспользуемся методом, описанным в работе [11, с.5]. Первым очевидным уравнением является уравнение движения фотона, поскольку для него интервал ds^2 равен нулю:

$$0 = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2$$

После преобразования получаем:

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2$$

и затем

$$dt = \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} dr = \frac{r}{r-2m}dr$$

Вычисление интеграла на интервале от r_0 до некоторой текущей точки дает выражение:

$$t = \int_{r0}^{r} \frac{r}{r-2m}dr = r - r_0 - 2m\ln\left(\frac{r_0-2m}{r-2m}\right)$$

Для простоты, краткости в качестве верхнего предела интегрирования сразу же взята сама переменная. Отметим, что это решение с точностью до констант и знака совпадает с решениями, полученными Боулером [12, с.181]:

"Время, необходимое свету для того, чтобы пройти от r_1 до r_2, можно найти, интегрируя (10.2.2):

$$t = \int_{r1}^{r2} \frac{dr}{1-2GM/r} = (r_2 - r_1) + 2GM\ln\left(\frac{r_2-2GM}{r_1-2GM}\right). \text{ (10.2.3)"}$$

и Новиковым [18, с.13]:

$$t = \frac{r_1 - r}{c} + \frac{r_g}{c}\ln\left(\frac{r_1-r_g}{r-r_g}\right) + t_0 \quad (2.3.3)$$

Собственно говоря, это решение достаточно очевидно и его приводят многие другие авторы практически в одном и том же виде [10, с.91; 13, с.87; 14, с.410; 16, с.419]. Действительно, если принять c = 1, r_g=2m и эквивалентно заменив индексы, уравнение (2.3.3) приобретает такой же вид, как и (10.2.3) с точностью до знака, который, видимо, просто означает направление движения фотона.

Диаграммы Крускала-Шекереса

Как мы видели в работе Эйнштейна, появление дополнительной параллельной Вселенной определенно связано с её искусственным, принудительным внедрением, списываемым на попытку устранения координатной сингулярности. В дальнейшем для этой же цели были разработаны и другие системы координат, которые также опираются на специфические замены переменных. Вполне ожидаемо, что такие замены либо явно, либо скрытно способны расширить пространство-время метрики Шварцшильда. Строго говоря, метрика Шварцшильда описывает *полностью* всё реально существующее, доступное для восприятия пространство-время. В ней время изменяется на бесконечном интервале, а сферические координаты охватывают всю Вселенную. Исходя из этого, любое расширение пространства-времени Шварцшильда следовало бы рассматривать с очевидных математических позиций: любое решение должно входить в область определения и изменения функции. Тем не менее, геометрию Шварцшильда расширяют:

"Система координат, которая наиболее полно охватывает геометрию Шварцшильда, известна как система координат Крускала - Шекереса" [17, т.3, с.18].

"Наиболее полно" в данном случае звучит как заявление о недостаточной полноте метрики Шварцшильда. В самом деле, а каковы основания ограничивать существующий реальный мир, Бытие метрикой Шварцшильда? С другой стороны, строго говоря, и расширение этой метрики не имеет ни логических, ни физических или математических противоречий. Если мы постулятивно добавляем к нашей реальности новые пространственные измерения, то получаем, в общем-то, допустимые, осмысленные решения. Поэтому расширение метрики Шварцшильда, очевидно, можно рассматривать именно с этой позиции: осмысленности, логической непротиворечивости, отсутствия абсурдов. Например, координаты Крускала – Шекереса показывают, что в пространстве - времени Шварцшильда имеются две сингулярности и две внешние области:

"В системе координат Крускала-Шекереса сингулярность r = 0 расположена в том месте, где

$v^2 - u^2 = 1$. Таким образом, фактически имеется не одна, а *две* сингулярности … Таким образом, и здесь имеются фактически *две* внешние области" [17, т.3, с.29].

В литературе существует множество иллюстративных изображений координат Крускала-Шекереса. Например, один из таких вариантов изображения диаграммы представлен на рис.1 [7, с.20, fig.1.1]:

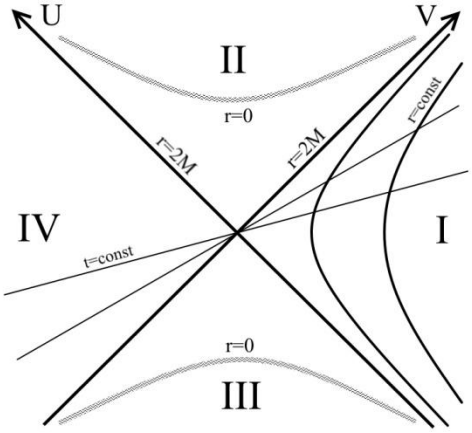


Рис.1. Вариант изображения диаграмм Крускала

Различаются такие диаграммы детализацией, полнотой, цветностью. Например, на рисунке, приведенном в учебнике "Гравитация" [17, т.3, с.32] оси *v*-*u* направлены, соответственно, вертикально и горизонтально. Это измененные оси по отношению к исходным диаграммам Крускала, на которых основными являются диагональные оси U-V, как показано на рис.1. Можно также встретить диаграмму, на которой вертикальная и горизонтальная оси условно обозначены как T-X [19, 8]. В исходном варианте на диаграммах Крускала сразу же возникают четыре попарно симметричные области как их неотъемлемое аналитическое свойство. В связи с появлением таких новых областей авторы учебника задаются выглядящим вполне уместно вопросом:

"Как это может быть? Когда геометрия описывается в шварцшильдовских координатах, она содержит одну сингулярность и одну внешнюю область; но когда геометрия Шварцшильда описывается в координатах Крускала-Шекереса, в ней появляются две сингулярности и две внешние области. Ответ состоит в том, что шварцшильдовская система координат охватывает лишь часть пространственно-временного многообразия; эту систему координат следует представлять себе как местную координатную сетку, наложенную лишь на часть этого многообразия. С помощью преобразования координат, приводящего к координатам Крускала-Шекереса, мы получаем метрику, которая покрывает все (или почти все) многообразие и которая является аналитическим продолжением ограниченного шварцшильдовского решения" [17, т.3, с.29].

Но с таким ответом нельзя согласиться. На самом деле есть другой, куда более очевидный ответ. Такое преобразование координат привело к *созданию с нуля дополнительной метрики*, которая на самом деле всё (или почти всё) многообразие не *покрывает*, а *добавляет* к исходному *полному* многообразию Шварцшильда его копию, дубль. Очевидно, здесь механизм такого добавления, в общем, тождественен тому, какой использовал Эйнштейн при создании параллельных миров и мостов между ними. Как и там, здесь дополнительное пространство-время возникло в результате квадратичной замены исходных координат.

Как и в случае с эйнштейновским расширением метрики Шварцшильда здесь так же можно безгранично увеличивать, продолжать "ограниченные шварцшильдовские решения". Можно, например, просто добавить ещё одну, вращательную координату, то есть, "раскрутить" координаты Крускала-Шекереса вокруг вертикальной оси. Из двух сингулярностей при этом будет образован двухполостной гиперболоид, из линий времени – конусы времени, а координатные сетки областей I и III станут набором гиперболоидов вращения. Как вариант, каждому значению введенного вращательного параметра ω_i можно будет приписать свою собственную параллельную Вселенную, причем переход между ними теперь уже не требует никаких специальных мостов.

Также можно "раскрутить" диаграмму вокруг горизонтальной оси. В результате будут получены новые конусы времени, а для нашей и параллельной Вселенной – гиперболоиды расстояний. При этом области Черной и Белой дыр объединятся, а сингулярности сольются в одну.

Третий вариант такого вольного "расширения" диаграммы Крускала – это просто наложить на неё любое множество таких же диаграмм, как листы в книге, каждый из которых будет описывать

свою пару "нашей и параллельной Вселенной", причем все "наши" и все "параллельные Вселенные", а также их области Черных и Белых дыр по принадлежности будут бесконфликтно соединены друг с другом по новому, добавленному пространственному измерению.

Очевидно, возможны как другие трактовки таких гиперболоидных координат Крускала-Шекереса, так и другие дополнительные их погружения в пространства Евклида большего числа измерений. Однако при всех этих модификациях следует отдавать себе отчет и, кстати, явно это указывать, что они никак не связаны с базовым пространством, метрикой Шварцшильда, а являются простым следствием её вольного, постулятивного расширения.

Противоречия и иллюзорность понятия Белой дыры

Бесспорно, что сами по себе все такие расширенные диаграммы *выглядят* непротиворечиво и *вроде бы* позволяют корректно отразить любые мировые линии. Для демонстрации рассмотрим гипотетический случай со звездолетом, совершающим замкнутый цикл полёта. В начальный момент времени эксперимента, в некотором отдаленном прошлом звездолёт находился на стационарной орбите вблизи горизонта событий Черной дыры – в точке А. Завершив запланированные эксперименты, астронавты отправляют световой сигнал удалённым наблюдателям и, для контроля, в сторону Черной дыры. Изобразим эту ситуацию на традиционной диаграмме Крускала-Шекереса. Для экономии места мы приводим только основную часть диаграммы – область I, нашу Вселенную (рис.2). И сразу же обнаруживаем, что в традиционных координатах Крускала нулевую геодезическую мы не можем изобразить как прямую линию!

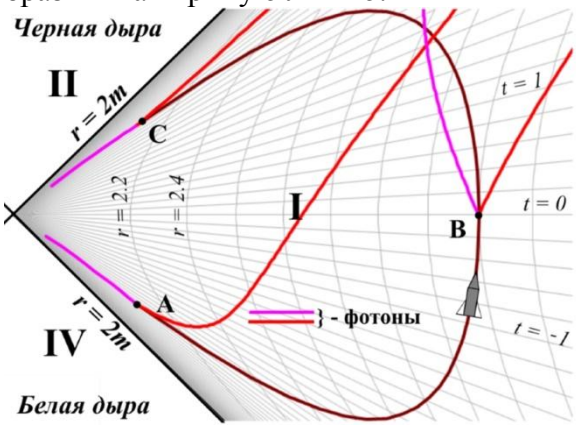


Рис.2. Эксперимент со звездолетом

Тем не менее, продолжим эксперимент. Звездолет удаляется от звезды с некоторой начальной скоростью и отрицательным ускорением. Достигнув наибольшего удаления, точки В, астронавты вновь отправляют два сигнала: один удаленным наблюдателям, другой – вновь в сторону Черной дыры. И эти нулевые геодезические на диаграмме изобразить в виде прямых линий нам не удалось.

Наконец, звездолёт вновь приблизился к исходной стационарной орбите, в точку С, с которой вновь посылает два световых сигнала. Как видим, в исходном варианте диаграмм Крускала светоподобные геодезические заметно отличаются от привычного конформного вида, когда они строго прямолинейны и наклонены под 45 градусов к горизонту. Связано это, очевидно, с особенностями использованной координатной сетки диаграммы. Действительно, если попытаться построить наугад, веером прямые линии во всех возможных направлениях, то среди них светоподобных мы не найдём вообще. Криволинейными оказываются все геодезические, и времениподобные, и светоподобные и пространственноподобные (кроме линий времени, то есть, пространственноподобные, тахионные) – рис.3 (слева). На рисунке изображены 36 прямых линий с угловым интервалом в 10 градусов, выглядящие как паук. Как видим, среди них собственно прямых линий нет, кроме одной – горизонтальной оси. Более того, левые стороны всех геодезических при продлении сходятся в левом углу диаграммы (к центру, если рассматривать полный вариант диаграммы).

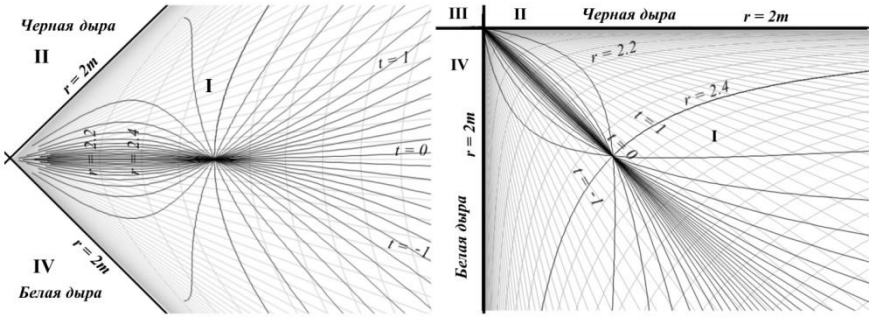


Рис.3. Веер прямых линий на диаграмме Крускала

Но, может быть, это особенность координатной сетки в данном варианте, на основе уравнений [17, т.3, с.28]? Чтобы проверить это, построим такое же семейство прямых линий на диаграмме Крускала-Шекереса в версии Строминжера – рис.3 (справа). Как и на предыдущих рисунках, здесь в полном размере также показана только область I – наша Вселенная. Поскольку в базовом варианте уравнения Строминжера [9, с.12] создают координатную сетку диаграммы Крускала в таком вот наклонном, диагональном виде, мы тоже не стали поворачивать её к традиционному положению. Главное видно и без поворота: пучок прямых линий всех возможных направлений показывает, что светоподобные, нулевые геодезические получить не удалось и в этом случае.

Как и выше, имея уравнения координатной сетки, мы обычным способом нанесли на неё графики аналитических функций $r = kt+r_0$. Функция задаёт прямую линию, направление которой определяет коэффициент k, а параметр r_0 означает лишь её параллельный перенос. Поэтому, если где-либо на диаграмме Крускала-Шекереса с исходной радиальной сеткой $r = const$ будут изображены светоподобные линии с наклоном в 45 градусов, к этому следует отнестись предельно скептически.

Черепашья координата на диаграмме Крускала

Скрупулезный анализ обнаруженной странности показал, что криволинейные нулевые геодезические неожиданным образом оказались связанными с так называемой черепашьей координатой. Такое название получило одно из специфических выражений в формализме теории гравитации. Собственно название само по себе связано с одной из апорий древнегреческого философа Зенона о быстроногом Ахиллесе, который никогда не догонит неторопливую черепаху. Как правило, уравнение черепашьей координаты в литературе [17, т.2, с.331] приводится в следующем виде:

$$r^* = r + 2m\ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right) \quad (25.31)$$

Рассмотрим это выражение более подробно, для чего тривиально преобразуем его к сопоставимому виду

$$r^* = r + 2m\ln(r - 2m) + C$$

Теперь сравним это выражение с полученным ранее (здесь, Новиков, Боулер) решением для фотона, падающего на горизонт событий Черной дыры Шварцшильда

$$t = r - r_0 - 2m\ln\left(\frac{r_0 - 2m}{r - 2m}\right)$$

Приведем и это выражение к такому же виду, что и для черепашьей координаты, выделив константу

$$t = r + 2m\ln(r - 2m) + C$$

Теперь сравним эти два преобразованных выражения:

$$t \equiv r^* = r + 2m\ln(r - 2m) + C$$

Как видим, черепашья координата r* удивительным образом оказалась уравнением для времени падения фотона на шварцшильдовскую Черную дыру, попросту *полностью* совпав с ним. Уравнивание времени и расстояния не должно вводить в заблуждение, поскольку здесь просто завуалирована скорость света c = 1. Можно предположить, что главное назначение черепашьей координаты, хотя об этом прямо нигде и не заявлено, – это *спрямление нулевых геодезических* на исходных диаграммах Крускала-Шекереса, что видно на рис.4 (справа). В исходной версии

диаграмм, как мы только что обнаружили, нулевые геодезические невозможно изобразить прямыми линиями с уклоном в 45 градусов, что автоматически делает невозможными и световые конусы в традиционном виде. При использовании черепашьей координаты исходные координаты Крускала на самом деле просто деформируются, но весьма удобным образом. Можно даже сказать, что эта координата на самом деле является уравнением нулевой геодезической. Как видно на рис.4 (справа), семейство, веер прямых линий, построенных с использованием черепашьей координаты, содержит нулевые геодезические.

Изображены линии, проходящие через одну точку, но имеющие разный угол наклона (то есть, скорость частицы). Как видим, действительно прямыми линиями являются только световые, нулевые геодезические (выделены). Следует отметить, что в этом случае линии r = const (параболы) традиционной сетки на диаграммах Крускала, видимо, уже не являются точными значениями радиальной координаты.

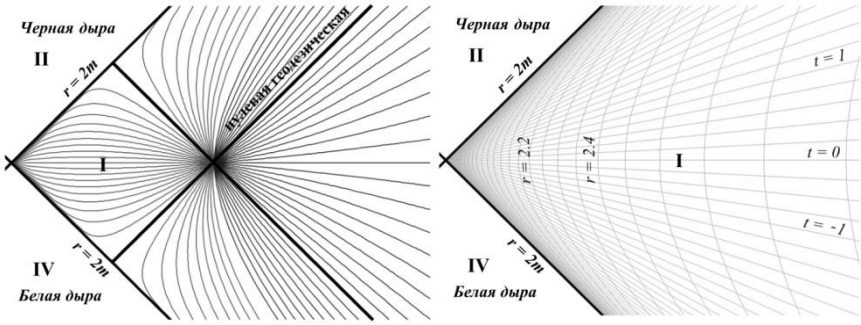


Рис.4. Семейство прямых линий на диаграмме Крускала в черепашьих координатах (слева). Конформная координатная сетка Крускала (справа)

При этом заметим, что для обеспечения конформности диаграммы Крускала её координатная сетка должна принципиально отличаться от исходной, традиционной. Линии r = const на такой диаграмме наносятся по экспоненциальному закону r ~ exp(u), как показано на рис.4 (справа), то есть, координатная сетка "расширяется" в обратном направлении: от сингулярности к бесконечности.

Используя черепашью координату, мы можем, исправить наш рис.2 с экспериментом на звездолете. И здесь совершенно неожиданно на приведенных диаграммах мы обнаруживаем ещё одну странность и даже, видимо, ранее никем не озвученную проблему.

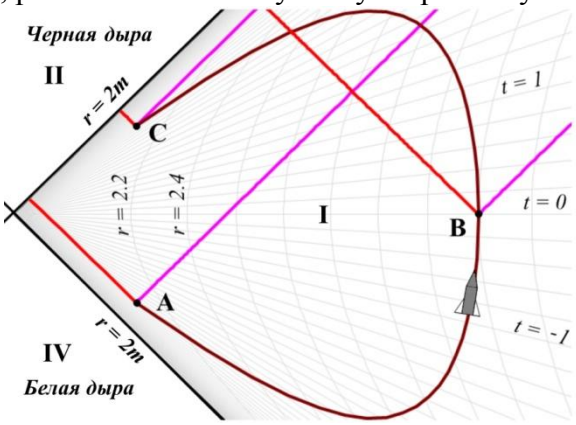


Рис.5. Эксперимент на звездолете

Посмотрим внимательно на рис.5, являющийся исправленным рис.2, и опишем изображенную на нем картину буквально, детально. Итак, мы видим, как звездолёт совершил бросок из окрестностей Черной дыры из точки А на некоторое удаление от неё, в точку В, после чего вновь вернулся на исходную орбиту в точку С. В процессе движения со звездолёта трижды подавались сдвоенные световые сигналы: один удалённым наблюдателям, а другой, зондирующий, эталонный – в сторону Черной дыры. Иными словами можно сказать, что один луч света испускался вперед, по ходу движения звездолёта, другой, одновременно с этим – в обратную сторону. Если угодно – за спину, через плечо. Мы не будем придираться к пространственноподобному виду его мировой линии, поскольку это всего лишь демонстрационный пример.

Итак, повторим: указанные пары сигналов были отправлены в момент старта из окрестностей Черной дыры из точки А, затем в наивысшей точке траектории В, на максимальном удалении от

Черной дыры. Последняя пара сигналов была отправлена в момент возвращения в исходную точку С.

Столь подробно процедуру сигнализации мы описываем неспроста. Во всех случаях сигналы были отправлены *в сторону* Черной дыры и в *противоположную* от неё сторону. И теперь самое интересное: вновь смотрим на диаграмму рис.5. Там отчетливо изображены все эти шесть сигналов. В описании мы также четко и ясно отметили, что ни один из них не был направлен куда-то в сторону, а *только* к Черной дыре и *только* в противоположном от неё направлении. Но на диаграмме три сигнала странным образом направлены не куда-нибудь, а в сторону, графически противоположную положению Белой дыры, то есть от неё. Мы явно отметили: все эти сигналы направлены вовне, наружу от Черной дыры. Три сигнала – на Черную дыру, и три – в противоположном от неё направлении, и ни одного сигнала, направленного к Белой дыре или от неё.

Итак: можно сколько угодно спорить и не соглашаться, но, как видим, эта самая Белая дыра на самом деле – это всё та же, одна-единственная Черная дыра. Нет на диаграмме ничего, кроме этой единственной Черной дыры. То, что странным образом решили назвать Белой дырой, на самом деле всё та же Черная дыра, но просто-напросто за нашей спиной. Если мы смотрим на неё – она Черная дыра. А если отвернулись и смотрим в противоположном направлении, она стала Белой?

Из этого же непосредственно следует, что фактически нет никаких разных областей II и IV – это одна и та же область, и сингулярность в ней тоже одна и та же. Нет никакого анти- или антипараллельного горизонта, а сетка r = const "обтекает" этот угол диаграммы гладко, без разрывов.

И здесь уместно вспомнить, каким образом были получены эти *считающиеся разными* парные области II и IV. Приведем примерную эволюцию координат Шварцшильда в диаграмму Пенроуза, несколько схожую с теми, что приводятся в литературе [15, с.164]. В исходном варианте координаты Шварцшильда рис.6а содержат одну сингулярность Черной дыры r = 0 и один её горизонт событий r = 2m. Затем начинается загадочная и не вполне последовательная деформация координат рис.6б. На некотором этапе без всякой видимой причины сингулярность Шварцшильда разрывается на две части – рис.6в. Заметим, что эта сингулярность, вообще-то является началом координат, их нулевой точкой. *Позади неё нет ничего*. Однако в момент её разрыва вдруг образовалась, материализовалась из ничего параллельная Вселенная.

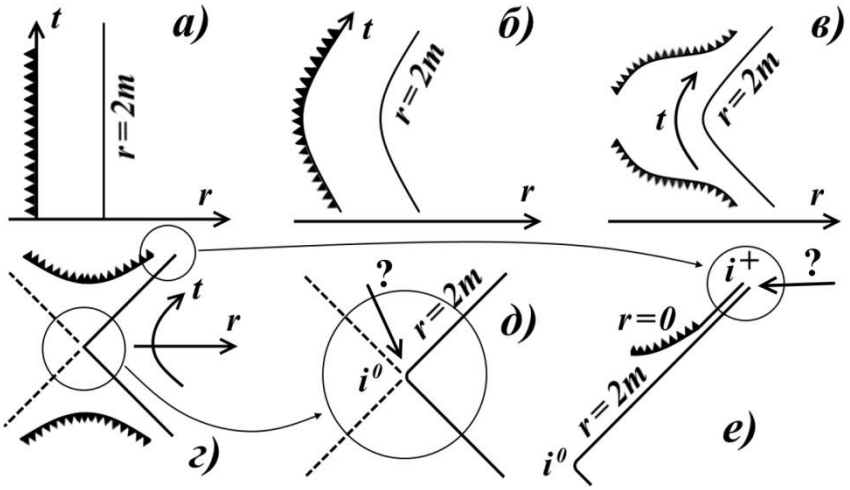


Рис.6. Эволюция координат Шварцшильда в диаграмму Пенроуза или Крускала-Шекереса

Смысл разрыва, разделения надвое начала координат, удвоения начальной точки объяснить весьма непросто. Было одно начало координат, стало два. Например, как бы выглядели в таком контексте двойное возникновение Вселенной, сдвоенный Большой взрыв? Тем не менее, процесс разделения продолжается рис.6г: удвоенные куски сингулярности, два начала координат разводятся, так сказать, по своим углам ринга и располагаются горизонтально.

А из пустого места, из точки разрыва стала стремительно разрастаться эфемерная параллельная Вселенная. Конечно, это уже частные, мелкие детали. Главное состоит в другом: горизонт событий r = 2m буквально переломили надвое, согнув в прямой угол. После этого начинаются очередные странные объединения линий. По сложно объяснимой причине из угла изогнутого горизонта событий "вытягиваются" как из небытия две линии – параллельный и антипараллельный горизонты, такие же эфемерные контуры эфемерной параллельной Вселенной. Но если мы внимательно присмотримся к этому "колену" горизонта r = 2m, присмотримся через очень сильный микроскоп, то мы не увидим на нём самом никаких ответвлений. Тем не менее, рис.6д, эти линии приклеивают к

"колену" и присваивают ему собственное имя i^0. На самом деле, это не *единая* точка, это искусственное образование, которое даже формально не может иметь аналитического описания.

Такая же процедура проделывается и в другой точке диаграммы рис.6е. Здесь дела обстоят ещё более странно, поскольку в этой окрестности собирается целый пучок линий, имеющих координаты от 0 до 2m. Тем не менее, этой окрестности также присваивается имя собственное – i^+. В итоге мы получаем довольно неестественное, но весьма удобное новообразование – максимально расширенное решение Шварцшильда. Главное в нём то, что разрезав *одну* и ту же, *единственную* сингулярность на две, мы стали считать, что теперь уже это две *разные* сингулярности. Но, как мы только что обнаружили, диаграммы решительно этому противятся, любые выкладки явно приводят нас к заключению: это по-прежнему одна и та же сингулярность одной и той же Черной дыры, одной и той же единственной Вселенной.

Заметим, что у всех без исключения традиционных диаграмм с Черной и Белой дырой как следствие есть еще одно удивительное, но закономерное и крайне, невероятно забавное свойство. На таких диаграммах *любая точка* всегда, в любой момент диаграммного времени *одинаково удалена* от Черной и Белой дыры. Действительно, давайте нанесем на диаграмму Крускала событие, произошедшее миллион лет назад в окрестности горизонта событий Черной дыры. Отметим это обстоятельство предельно четко и определенно: в окрестности Черной, а не Белой дыры. Изобразим это событие на диаграмме, изобразим условно, поскольку на диаграмме эту точку можно разглядеть только в электронный микроскоп. Итак, обозначим это событие буквой А.

Затем изобразим другое событие, которое произойдет, но теперь уже в окрестности Белой дыры, лишь через миллион лет. Скажем, в этот момент из неё вылетела последняя из оставшихся в ней частиц. Либо, как принято считать, где-то в связанную с нею Черную дыру упала эта самая частица и, туннелируя, вылетела из нашей Белой дыры. Это событие обозначим буквой В. Очевидно, что его мы тоже обозначим условно, поскольку и его на диаграмме Крускала можно разглядеть разве что в электронный микроскоп. А теперь посмотрим на получившуюся диаграмму рис.7.

Нет и нет! На диаграмме всё изображено верно: событие А – в окрестности Черной дыры, а событие В – в окрестности Белой. Но почему же на диаграмме мы явно видим обратное: событие А находится рядом с сингулярностью Белой дыры, а событие В – рядом с сингулярностью Черной?!

Вот в этом и состоит абсурд двух сингулярностей и пары дыр. Это *одна* сингулярность, это *одна*, Черная дыра, нет никакой Белой дыры с её анти-сингулярностью. Хотя между событиями А и В прошло два миллиона лет, но они всё это время, всегда находились в *одной и той же* точке пространства, на одном и том же удалении от горизонта событий – r_0. Это одна из *очевидных* особенностей таких диаграмм: на них в принципе *невозможно* изобразить точку, которая находилась бы на *разном* расстоянии от Черной и Белой дыры. Никакими ухищрениями ни на одну такую диаграмму *невозможно* нанести такое событие, чтобы оно к одной из сингулярностей было ближе, чем к другой. Любая точка на диаграмме Крускала или Пенроуза *всегда равноудалена* как от Черной, так и от Белой дыры, поскольку в один и тот же момент времени невозможно находится на разных расстояниях от одного и того же объекта. Добавим, что это свойство нигде в литературе не описано.

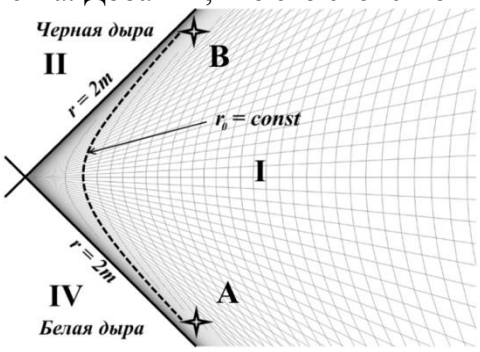


Рис.7. Два события в окрестностях Черной и Белой дыр

Еще раз отметим: два нулевых куска оси координат на подобных диаграммах разнесены в разные места, что весьма неестественно. На диаграммах фактически присутствуют *два* начала координат: каждая из сингулярностей имеет нулевое значение координаты r = 0. Легко догадаться, что в этом направлении просторы для многомирового творчества просто не имеют границ.

В этой связи возникают разные, довольно каверзные вопросы. Например, весьма странно теперь выглядят попытки построить мост, червоточину, проходящие в промежутке между двумя

сингулярностями, если оказывается, что это, вообще-то, одна и та же сингулярность, точка и никакого "между" здесь в принципе быть не может. Попробуйте-ка пройти между двумя столбами, если это один и тот же столб. Кроме того мост должен соединить нашу известную Вселенную с миражом, не имеющим никакой разумной истории происхождения.

Белая дыра на диаграмме Пенроуза

Итак, мы неожиданно обнаружили, что Черная и Белая дыра оказываются совмещенными, являются одной и той же единственной дырой с единственной сингулярностью. Возникает естественный, но риторический вопрос: что осталось после такого слияния – классическая Черная или мифическая Белая дыра? Рассмотрим ситуацию еще раз, теперь уже на диаграмме Пенроуза для так называемой вечной Черной дыры – рис.8.

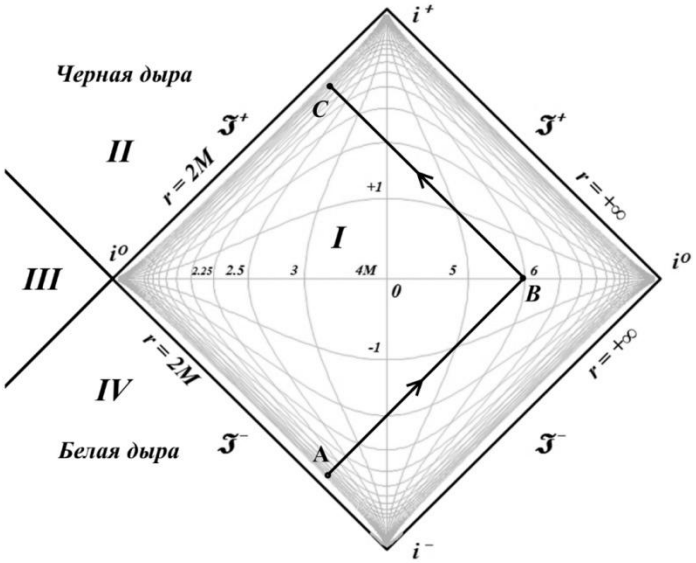


Рис.8. Диаграмма Пенроуза для вечной Черной дыры

Собственно говоря, понятие Белой дыры как раз и возникло из диаграмм подобного вида, среди которых одними из первых были, видимо, координаты Крускала-Шекереса. Если верхняя левая граница – это горизонт событий Черной дыры, то левая нижняя граница, видимо, должна быть её антиподом, то есть, горизонтом событий Белой дыры.

Вновь изобразим теперь уже на этой диаграмме некоторое произвольное событие А, звездолет, находящийся в далеком прошлом вблизи горизонта событий Черной дыры. И что мы обнаруживаем? Оказывается, визуально на диаграмме мы изобразили звездолёт вблизи горизонта событий Белой дыры. Но ведь требовалось изобразить его возле Черной дыры.

Ну, хорошо. Пусть теперь, как выше на диаграмме Крускала, этот звездолёт посылает прожектором, лазером луч света в противоположном направлении от Черной дыры, в сторону второго звездолета В. И вновь нам на диаграмме изобразить это не удаётся. Конечно, луч света точно направлен на звездолет В, но со стороны Белой дыры, из окрестностей её, белого горизонта событий.

Как известно, на всех диаграммах Пенроуза лучи света конформны и всегда изображаются прямыми линиями, параллельными сторонам, границам диаграммы. Правда, следует уточнить, что для диаграмм Пенроуза с горизонтами событий это правило в общем случае нарушается: в обычном их виде ни нулевые геодезические, ни световые конусы изобразить конформно, с углами в 45° нельзя. Но нас это сейчас не должно беспокоить. Поэтому теперь попытаемся отправить со звездолёта В ответный световой сигнал – в сторону звездолёта А. Вне всяких сомнений в реальном пространстве-времени это возможно. Однако и в этот раз у нас возникают геометрические проблемы на диаграмме. Мы же видим: на диаграмме звездолёт А находится слева снизу, но направить туда луч света мы не можем, поскольку это будет движение в обратном направлении времени, в прошлое.

Поэтому единственное направление – это влево вверх. Именно в этом направлении для звездолёта В находится горизонт событий Черной дыры. И отправленный световой сигнал получит звездолёт С. Этот звездолёт находится в окрестностях горизонта событий Черной дыры.

Но что это за новый, третий звездолёт? Ведь мы изначально разместили в этой точке на диаграмме звездолет А? А дело в том, что это он и есть – звездолёт А, только в другой момент времени, в далеком будущем. Но теперь визуально он оказался уже в окрестности горизонта событий Черной дыры, куда мы его изначально и поместили.

Что же получается? Мы поместили звездолет А вблизи горизонта событий Черной дыры, но на диаграмме обнаружили, что он странным образом оказался вблизи, в окрестности горизонта событий Белой дыры. Затем мы послали два световых сигнала, и выяснилось, что второй сигнал получил звездолёт С, который оказался на самом деле звездолетом А и именно в той исходной точке, теперь уже точно в окрестности Черной дыры.

Конечно же, никаких чудес не произошло. Просто мы явно и недвусмысленно показали, что существует лишь один горизонт событий – Черной дыры, что существует лишь одна дыра – Черная, нет никакой Белой дыры, это иллюзия, миф.

Как бы близко к любому из горизонтов мы ни располагали исходную точку звездолёта, всегда перед ним или позади него будет только одна и та же Черная дыра. Следовательно, нижний левый горизонт событий на диаграмме Пенроуза является горизонтом событий *Черной дыры*. Той же самой, что и слева вверху. Оба левых горизонта событий r = 2m на диаграмме принадлежат одной и той же Черной дыре. Для Белой дыры на диаграмме Пенроуза просто нет места. Впрочем, как и вообще на любой другой.

Повторим, что, в сущности, это достаточно очевидно. Все линии r = const являются сплошными, неразрывными линиями, изначально примыкающими к левому углу диаграммы, постепенно отдаляясь от него. Только такая трактовка горизонтов позволяет рассматривать полный диапазон движения в пространстве-времени диаграммы Пенроуза: от горизонта событий до бесконечности и обратно. Образ Белой дыры в такую картину попросту не вписывается.

Например, будет невозможно изобразить движение звездолёта прочь от Черной дыры, поскольку все эти направления "от" оказываются закрепленными за мнимой Белой дырой. Но отказ от этого ошибочного понятия ставит всё на свои места.

Рассмотрим еще раз звездолет, такой же, что и на диаграмме Крускала выше. Звездолёт имеет сверхмощные двигатели, позволяющие ему вырваться из гравитации Черной дыры после приближения к ней на расстояние, например, r = 2.01m, что является вполне физически допустимой ситуацией. Затем, после удаления на расстояние, скажем, 6m, звездолет разворачивается и снова движется к горизонту событий, почти до соприкосновения с ним. На диаграмме Пенроуза без Белой дыры рис.8 такая мировая линия может быть изображена корректно, без каких-либо неопределенностей или условностей. Однако при замене нижнего горизонта Черной дыры на якобы горизонт событий Белой дыры такую картину на диаграмме изобразить невозможно, возникает двусмысленность. Изображая удаление звездолета от Черной дыры, на диаграмме мы фактически, визуально изображаем его удаление от Белой дыры.

Как видим, обнаруженная выше на диаграммах Крускала особенность присуща точно так же и диаграммам Пенроуза. Изобразить движение *от* Черной дыры ни в координатах Крускала, ни на диаграммах Пенроуза нельзя, если считать нижнюю сингулярность присущей Белой дыре.

В сущности, это довольно очевидный парадокс, абсурд. Поэтому остаётся лишь сожалеть, что годами из учебника в учебник, из статьи в статью кочуют связанные с ним мосты, проходящие строго между двумя, *якобы* разными сингулярностями, но являющимися на самом деле одной и той же сингулярностью одной и той же единственной Черной дыры.

В заключение рассмотрим еще одну парадоксальную для Белых дыр ситуацию. Рассмотрим на рис.9 кажущиеся разными две точки в пространстве: А – вблизи Черной дыры и В – вблизи Белой дыры. В один и тот же момент времени из этих точек излучены "два" луча света. Для определенности на диаграмме точки находятся от объектов на расстоянии, равном 2,125m, а время излучения – минус 5m. Луч света от Черной дыры изобразим толстой штриховой линией, а луч света от Белой дыры – тонкой сплошной линией. И вновь обнаруживаем всё то же противоречие. Никакими ухищрениями мы не сможем разнести эти две точки и эти два луча света. Во всех случаях точки А и В находятся в одном и том же месте диаграммы, а лучи света сливаются.

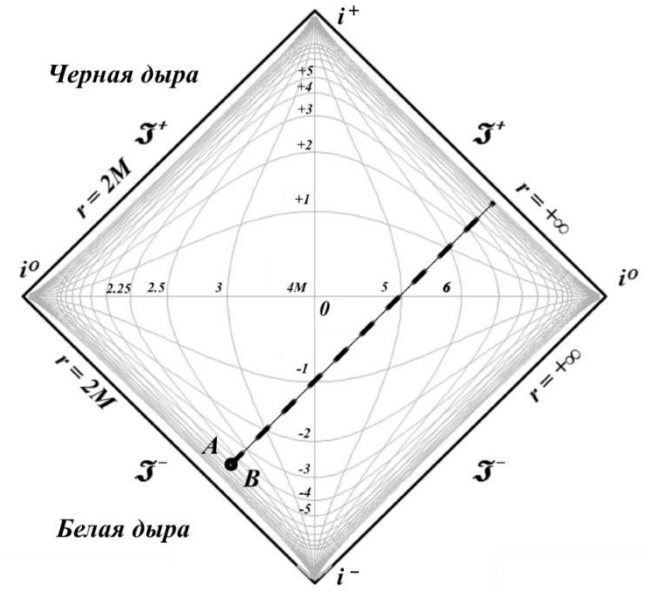


Рис.9. Два луча света из разных точек

Именно по этой причине мы их изобразили по-разному: тонкой сплошной и толстой штриховой, иначе они просто слились бы в одну линию. Но это и означает, что Белая дыра и Черная дыра – это *один и тот же объект*, обе точки – это одна и та же точка, а два луча света – это один и тот же луч счета, испущенный из этой единственной точки пространства-времени.

Библиографический список:

7. Antonio Sanchez-Puente, Black Holes, Geons, and Singularities in Metric-Affine Gravity, https://arxiv.org/abs/1704.06524v3

8. Kruskal's diagram, https://en.wikipedia.org/wiki/File:Kruskal_diagram_of_Schwarzschild_chart.svg

9. Strominger A., Black Holes from A to Z. Center for the Fundamental Laws of Nature, Harvard University, Cambridge, 2015

10. Бескин В.С., Гравитация и астрофизика. – М.: Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН. Учебно-Научный Комплекс, 2007

11. Блиндер С.М., Столетие общей теории относительности (1915-2015); Решение Шварцшильда и черные дыры, 2015, URL: https://arxiv.org/pdf/1512.02061.pdf

12. Боулер М., Гравитация и относительность. Пер. с англ. А.А.Бейлинсона, Редакция и дополнение Н.В.Мицкевича. – М.: "Мир", 1979.

13. Вебер Дж., Общая теория относительности и гравитационные волны. Пер. с англ. Н.Мицкевича, под ред. проф. Д.Иваненко. – М.: Изд. иностр. литературы. 1962 г.

14. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д., Релятивистская астрофизика.— УФН, 1964, т.LXXXIV, вып.3, с.377-417

15. Кауфман У.Д., "Космические рубежи теории относительности. М.: "Мир", 1981, 352с.

16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т.II. Теория поля.— 8-е изд., стереот.-М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003, (Т. II).

17. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, т.1-3. – М.: "Мир", 1977

18. Новиков И.Д., Фролов В.П., Физика черных дыр. – М. : Наука., Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986, 328 с.

19. Об истинных размерах Черных дыр на пальцах, страница пользователя sly2m на livejournal, URL: http://sly2m.livejournal.com/660502.html?thread=12401942

20. Эйнштейн А. Собрание научных трудов в четырех томах. Том 2, Работы по теории относительности, 1921-1955. М.: Наука, 1966.

21. Дополнения к статье, Самиздат, URL: http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/white-dop.shtml

Научное издание

Коллектив авторов

ISSN 2500-1140

Техниконаучный журнал «Техноконгресс»

Кемерово 2019